This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF MICHIGAN

Ein vollständiges Verzeichnis der Sammlung „Aus Natur und Geisteswelt" befindet sich am Schluß dieses Bandes.

Alfred 2000:808

MATHEMATIK
QA

Die Sammlung
„Aus Natur und Geisteswelt"

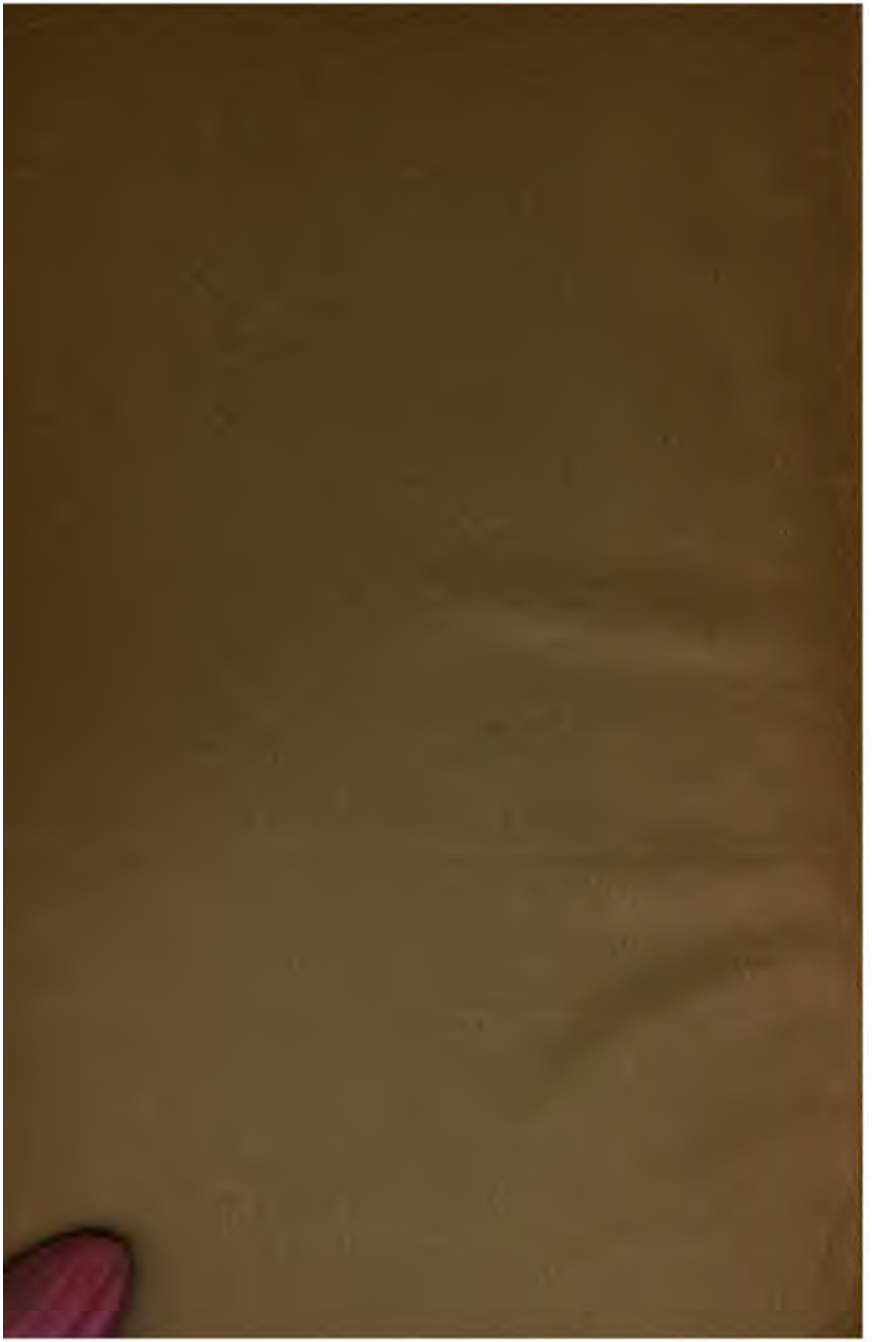
die nunmehr auf ein mehr denn zehnjähriges Bestehen zurückblicken darf und jetzt 240 Bände umfaßt, von den 60 bereits in zweiter bis vierter Auflage vorliegen, verdankt ihr Entstehen dem Wunsche, an der Erfüllung einer bedeutsamen sozialen Aufgabe mitzuwirken. Sie soll an ihrem Teil der unserer Kultur aus der Scheidung in Kasten drohenden Gefahr begegnen helfen, soll dem Gelehrten es ermöglichen, sich an weitere Kreise zu wenden, dem materiell arbeitenden Menschen Gelegenheit bieten, mit den geistigen Errungenschaften in Fühlung zu bleiben. Der Gefahr, der Halbbildung zu dienen, begegnet sie, indem sie nicht in der Vorführung einer Fülle von Lehrstoff und Lehrsätzen oder etwa gar unerwiesenen Hypothesen ihre Aufgabe sucht, sondern darin, dem Leser Verständnis dafür zu vermitteln, wie die moderne Wissenschaft es erreicht hat, über wichtige Fragen von allgemeinstem Interesse Licht zu verbreiten. So lehrt sie nicht nur die zurzeit auf jene Fragen erzielten Antworten kennen, sondern zugleich durch Begreifen der zur Lösung verwandten Methoden ein selbständiges Urteil gewinnen über den Grad der Zuverlässigkeit jener Antworten.

Es ist gewiß durchaus unmöglich und unnötig, daß alle Welt sich mit geschichtlichen, naturwissenschaftlichen und philosophischen Studien befasse. Es kommt nur darauf an, daß jeder Mensch an einem Punkte sich über den engen Kreis, in den ihn heute meist der Beruf einschließt, erhebt, an einem Punkte die Freiheit und Selbständigkeit des geistigen Lebens gewinnt. In diesem Sinne bieten die einzelnen, in sich abgeschlossenen Schriften gerade dem „Laien" auf dem betreffenden Gebiete in voller Anschaulichkeit und lebendiger Frische eine gedrängte, aber anregende Übersicht.

Freilich kann diese gute und allein berechtigte Art der Popularisierung der Wissenschaft nur von den ersten Kräften geleistet werden; in den Dienst der mit der Sammlung verfolgten Aufgaben haben sich denn aber auch in dankenswertester Weise von Anfang an die besten Namen gestellt, und die Sammlung hat sich dieser Teilnahme dauernd zu erfreuen gehabt.

So wollen die schmucken, gehaltvollen Bände die Freude am Buche wecken, sie wollen daran gewöhnen, einen kleinen Betrag, den man für Erfüllung körperlicher Bedürfnisse nicht anzusehen pflegt, auch für die Befriedigung geistiger anzuwenden. Durch den billigen Preis ermöglichen sie es tatsächlich jedem, auch dem wenig Begüterten, sich eine kleine Bibliothek zu schaffen, die das für ihn Wertvollste „Aus Natur und Geisteswelt" vereinigt.

Leipzig, 1908. **B. G. Teubner.**



Aus Natur und Geisteswelt
Sammlung wissenschaftlich-gemeinverständlicher Darstellungen
197. Bändchen

Einführung in die Infinitesimalrechnung

mit einer historischen Übersicht

Von
Dr. Gerhard Kowalewski
a. o. Prof. der Mathematik an der Universität Bonn

Mit 18 Figuren im Text

Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig 1908

Alle Rechte, einschließlich des Übersetzungsrechts, vorbehalten.

Vorwort.

Das vorliegende Büchlein bietet die Grundbegriffe und Hauptsätze der Infinitesimalrechnung in einer Form, die ungefähr den modernen Anschauungen entspricht. Es ist überall der Versuch gemacht, so streng wie möglich zu sein, ohne doch durch zu tiefes Eingehen auf alle Schwierigkeiten den Leser abzuschrecken. Eine völlig strenge Begründung der Infinitesimalrechnung ist nur nach klarer Festlegung des Zahlbegriffs möglich. Eine solche hätte aber in den Rahmen dieser Schrift nicht hineingepaßt. Deshalb wurde davon abgesehen.

Der Verfasser hofft, daß jeder Gebildete aus diesem kleinen Buch einen Begriff von dem Wesen der Infinitesimalrechnung gewinnen kann, und daß insbesondere auch der mathematische Student Nutzen daraus ziehen wird.

Bonn, September 1907.

G. Kowalewski.

208631

Inhaltsübersicht.

Seite

Erstes Kapitel.

Funktionen, Grenzwerte, Reihen . . . . . 1—42

Zweites Kapitel.

Differentialrechnung . . . . . 43—98

Drittes Kapitel.

Integralrechnung. . . . . 98—119

Historische Übersicht . . . . . 119—126

Erstes Kapitel.

Funktionen, Grenzwerte, Reihen.

§ 1. Veränderliche und Konstanten.

Eine Veränderliche ist eine Größe, die verschiedene Werte annimmt, eine Konstante dagegen eine Größe, die ihren Wert nicht ändert. So sind z. B. Größe und Gewicht eines heranwachsenden Menschen Veränderliche, Meter und Kilogramm, mit denen wir jene messen, Konstanten. Auch die seit einem bestimmten Zeitpunkt verflossene Zeit ist eine Veränderliche, während die Sekunde, mit der wir sie messen, eine Konstante ist.

§ 2. Funktionen einer Veränderlichen.

Der Funktionsbegriff ist der wichtigste Begriff der höheren Mathematik. In der Allgemeinheit, wie wir ihn jetzt erklären werden, hat ihn zum ersten Mal Dirichlet eingeführt (1837).

y heißt eine Funktion von x, wenn zu jedem Wert

Berichtigungen.

Seite 33, Zeile 12 u. 13 von unten: „aufsteigende" statt „absteigende" und umgekehrt.
„ 53, letzte Formel: $(\cot x)'$ statt $(\cos x)'$.
„ 58, Zeile 13 von unten: $x+h$ statt $a+h$.
„ 59, Zeile 10: $(0<\vartheta<1)$ zu streichen.
„ 61, Zeile 14: „die" statt „den".
„ 69, Zeile 12: $a_n x_0^{n-1}$ statt $a_n x_0^n$.
„ 99, Zeile 12: $a_2 x^2$ statt $a_2 x$.

Inhaltsübersicht.

Seite

Erstes Kapitel.

Funktionen, Grenzwerte, Reihen . . . . . 1—42

Zweites Kapitel.

Differentialrechnung . . . . . 43—98

Drittes Kapitel.

Integralrechnung. . . . . 98—119

Historische Übersicht . . . . . 119—126

Erstes Kapitel.

Funktionen, Grenzwerte, Reihen.

§ 1. Veränderliche und Konstanten.

Eine Veränderliche ist eine Größe, die verschiedene Werte annimmt, eine Konstante dagegen eine Größe, die ihren Wert nicht ändert. So sind z. B. Größe und Gewicht eines heranwachsenden Menschen Veränderliche, Meter und Kilogramm, mit denen wir jene messen, Konstanten. Auch die seit einem bestimmten Zeitpunkt verflossene Zeit ist eine Veränderliche, während die Sekunde, mit der wir sie messen, eine Konstante ist.

§ 2. Funktionen einer Veränderlichen.

Der Funktionsbegriff ist der wichtigste Begriff der höheren Mathematik. In der Allgemeinheit, wie wir ihn jetzt erklären werden, hat ihn zum ersten Mal Dirichlet eingeführt (1837).

y heißt eine Funktion von x, wenn zu jedem Wert von x ein Wert von y gehört. Bezeichnen wir z. B. mit x das genaue Lebensalter eines Menschen, mit y die Größe (oder das Gewicht) dieses Menschen im Alter x, so gehört offenbar zu jedem Wert von x ein Wert von y. Größe und Gewicht eines Menschen sind also Funktionen seines Alters.

Andere Beispiele für Funktionen sind folgende:

Oberfläche und Inhalt einer Kugel sind Funktionen ihres Radius.

Die Endgeschwindigkeit eines fallenden Körpers ist eine Funktion der Fallhöhe.

Das Volumen einer Gasmenge ist (bei gegebener Temperatur) eine Funktion des Drucks.

Wir empfehlen dem Leser, weitere Beispiele für Funktionen aus Geometrie, Physik und Chemie selbst herauszusuchen, um sich dadurch den Funktionsbegriff möglichst klar zu machen.

Wenn y eine Funktion von x ist, so nennt man x die unabhängige, y die abhängige Veränderliche.

Um auszudrücken, daß y eine Funktion von x ist, schreibt man

$$y = f(x) \qquad \text{(Lies: „}y \text{ gleich } f \text{ von } x\text{“.)}$$

Hat man gleichzeitig verschiedene Funktionen zu betrachten, so wendet man die Bezeichnungen $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, ... oder $\varphi(x)$, $\chi(x)$, $\psi(x)$, ... an. Es werden fast alle Buchstaben (große und kleine) zur Bezeichnung von Funktionen benutzt.

§ 3. Funktionen von mehreren Veränderlichen.

z heißt eine Funktion von x und y, wenn zu jedem Wertsystem x, y ein Wert von z gehört. Man nennt x und y die unabhängigen Veränderlichen, z die abhängige Veränderliche und schreibt

$$z = f(x, y).$$

Sind neben $f(x, y)$ noch andere Funktionen von x und y zu betrachten, so nimmt man bei ihnen statt f andere Buchstaben.

Beispiele für Funktionen von zwei Veränderlichen.

Der Inhalt eines Rechtecks ist eine Funktion der beiden Seiten. Das Volumen einer Gasmenge ist eine Funktion von Druck und Temperatur. Der Leser möge selbst weitere Beispiele bilden.

In durchaus entsprechender Weise definiert man Funktionen von drei, vier, fünf, ... Veränderlichen.

§ 4. Geometrische Darstellung der Zahlen, Zahlenpaare und Zahlentripel.

Descartes hat in seiner „Géométrie“ (1637) gelehrt, wie man die Zahlen durch die Punkte einer Geraden, die Zahlenpaare*) durch die Punkte der Ebene, die Zahlentripel*) durch die Punkte des Raumes in einfacher Weise versinnlichen kann, und er wurde dadurch der Begründer der analytischen Geometrie.

1. Wenn wir eine Gerade betrachten (Fig. 1), so können wir uns in zwei verschiedenen Richtungen auf ihr bewegen. Die

*) Genau genommen müßten wir sagen „geordnete Zahlenpaare“ und „geordnete Zahlentripel“, weil in jedem Paar ein 1. und 2., in jedem Tripel ein 1., 2. und 3. Glied unterschieden wird.

eine dieser beiden Richtungen ist in der Figur durch einen Pfeil markiert. Sie soll die positive heißen, die andere die negative. Eine Bewegung auf unserer Geraden in positiver Richtung wollen wir eine Vorwärtsbewegung, eine Bewegung in negativer Richtung eine Rückwärtsbewegung nennen.*) Nun sei A ein erster, B ein zweiter Punkt auf der Geraden; d sei die Entfernung beider, gemessen mit einer zu Grunde gelegten Längeneinheit. Bewegen wir uns auf der Geraden von A nach B, so beschreiben wir die Strecke AB. Haben wir dabei eine Vorwärtsbewegung ausgeführt, so wollen wir sagen:

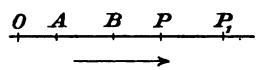


Fig. 1.

Die Strecke AB hat die Maßzahl d.

Haben wir eine Rückwärtsbewegung ausgeführt, so wollen wir sagen:

Die Strecke AB hat die Maßzahl $-d$.

Die Maßzahl einer Strecke AB ist also die mit einem gewissen Vorzeichen versehene Entfernung der beiden Punkte A, B. Dieses Vorzeichen ist das Zeichen $+$, wenn man von A nach B durch eine Vorwärtsbewegung gelangt (die Lokomotive also von A nach B vorwärts fahren muß) das Zeichen $-$, wenn man von A nach B durch eine Rückwärtsbewegung gelangt (die Lokomotive also von A nach B rückwärts fahren muß).

Die Maßzahl der Strecke AB wollen wir mit $\overline{AB}$ bezeichnen, die Entfernung der beiden Punkte A, B dagegen mit $|AB|$.

Dann ist offenbar $|AB| = |BA|$, aber

$$\overline{AB} = -\overline{BA}; \tag{1}$$

denn wenn die Lokomotive z. B. von A nach B vorwärts fährt, so muß sie von B nach A rückwärts fahren.

Eine wichtige Relation besteht zwischen den durch drei Punkte A, B, C bestimmten Strecken. Es ist immer

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0 \quad \text{oder} \quad \overline{AB} = \overline{CB} - \overline{CA}. \tag{2}$$

Diese Formel kann man aus der Fig. 2 ablesen, welche die

*) Es ist zweckmäßig, sich vorzustellen, daß die Gerade die eine der beiden Schienen ist, auf denen sich eine Lokomotive bewegt, die nicht umgedreht werden kann.

verschiedenen Arten, wie die Punkte A, B, C liegen können, veranschaulicht. Man muß dabei auf die Relation (1) Rücksicht nehmen.

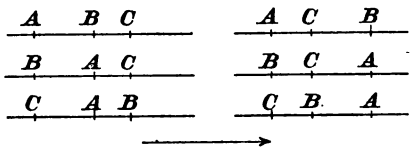


Fig. 2.

Nach diesen Vorbereitungen können wir die Versinnlichung der Zahlen durch die Punkte einer Geraden, die wir die Zahlenlinie nennen, in folgender Weise bewerkstelligen. Wir wählen auf der Geraden (vgl. Fig. 1) einen festen Anfangspunkt O. Jedem Punkt P ordnen wir dann die Zahl

$$x = \overline{OP} \tag{3}$$

zu und nennen sie seine Abszisse. Zwei verschiedene Punkte P und P_1 haben dann immer verschiedene Abszissen; denn aus $\overline{OP} = \overline{OP_1}$ folgt auf Grund der Formel (2) $\overline{PP_1} = 0$, also auch $|PP_1| = 0$. Ferner läßt sich, wenn eine Zahl x gegeben ist, stets P so wählen, daß $\overline{OP} = x$ wird. Ist $x = 0$, so fällt P mit O zusammen; ist x positiv, so gelangt man von O nach P durch eine Vorwärtsbewegung um x; ist x negativ, so gelangt man von O nach P durch eine Rückwärtsbewegung um $-x$. Durch Formel (3) ist also zwischen den Zahlen x und den Punkten P der Geraden eine Zuordnung getroffen, welche folgende Eigenschaften hat:

Jedem Punkt P entspricht eine Zahl x, seine Abszisse; verschiedene Punkte haben verschiedene Abszissen; jede Zahl x kommt als Abszisse eines Punktes vor.

Eine solche Zuordnung wollen wir eine Abbildung nennen. Es ist uns also gelungen, die Zahlen auf die Punkte einer Geraden abzubilden.

Sind x und x_1 die Abszissen der Punkte P bzw. P_1, so folgt aus (2):

$$\overline{PP_1} = x_1 - x.$$

Der Leser möge unter Benutzung dieser Formel die Abszisse des Mittelpunkts einer Strecke berechnen.

2. Um eine Versinnlichung der Zahlenpaare x, y zu gewinnen, ziehen wir in einer Ebene durch einen Punkt O, den wir den Anfangspunkt nennen, zwei verschiedene feste Geraden

(Koordinatenachsen). Auf jeder von ihnen setzen wir eine positive Richtung fest (vgl. Fig. 3). Die eine Gerade möge die x-Achse, die andere die y-Achse heißen. Ist nun P ein beliebiger Punkt der Ebene, so ziehen wir durch ihn die beiden Parallelen zu den Achsen. Dadurch entsteht auf der x-Achse der Schnittpunkt X, auf der y-Achse der Schnittpunkt Y. Jetzt setzen wir*)

$$(4) \qquad x = \overline{OX} = \overline{YP} \qquad y = \overline{OY} = \overline{XP}$$

und nennen x die x-Koordinate, y die y-Koordinate von P. Man sagt auch, x sei die Abszisse, y die Ordinate von P.

Jedem Punkt P der Ebene entspricht auf diese Weise ein Zahlenpaar x, y; die erste Zahl ist die Abszisse, die zweite die Ordinate von P. Zwei verschiedenen Punkten entsprechen offenbar verschiedene Zahlenpaare. Zu jedem Zahlenpaar x, y läßt sich ein Punkt finden, dessen Abszisse x und dessen Ordinate y ist.

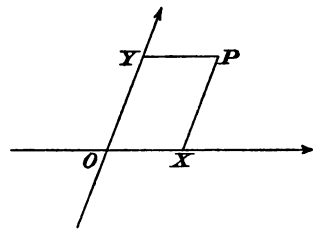


Fig. 3.

Es ist uns also gelungen, die Zahlenpaare x, y auf die Punkte der Ebene abzubilden. Diese Abbildung ist durch die Formeln (4) bestimmt.

3. Um eine Abbildung der Zahlentripel x, y, z auf die Punkte des Raumes zu gewinnen, zieht man durch einen Punkt O drei Geraden, x-Achse, y-Achse und z-Achse genannt, die nicht in einer Ebene liegen. Sie bestimmen paarweise drei Ebenen, die Koordinatenebenen. Ist P ein beliebiger Punkt des Raumes, so legt man durch ihn drei Ebenen parallel zu den Koordinatenebenen. Dadurch entsteht auf der x-Achse ein Schnittpunkt X, auf der y-Achse Y, auf der Z-Achse Z. Jetzt setzen wir

$$(5) \qquad x = \overline{OX},\ y = \overline{OY},\ z = \overline{OZ}.$$

Diese Formeln liefern, wie man leicht erkennt, eine Abbildung der Zahlentripel auf die Punkte des Raumes.

---

*) Hat man auf einer Geraden die positive Richtung festgesetzt, so pflegt man sie, wenn die Gerade eine Parallelverschiebung erfährt, ungeändert zu lassen. Nach Festsetzung der positiven Richtung auf den Koordinatenachsen ist also auch auf den zu ihnen parallelen Geraden die positive Richtung festgelegt.

§ 5. Geometrische Darstellung der Funktionen.

Wenn man eine Funktion $y = f(x)$ geometrisch darstellen will, so kann man die Abbildung der Zahlenpaare auf die Punkte der Ebene benutzen. Man sucht für jeden Wert*) der unabhängigen Veränderlichen x den Punkt auf, dessen Abszisse gleich x und dessen Ordinate gleich $f(x)$ ist. Diese Punkte erfüllen eine sogenannte Kurve. Sie heißt die Bildkurve der Funktion $f(x)$ und $y = f(x)$ die Gleichung dieser Kurve. Man kann, wenn die Bildkurve gezeichnet ist, aus ihr ablesen, welcher Wert der abhängigen Veränderlichen jedem Wert der unabhängigen entspricht.

Will man eine Funktion $z = f(x, y)$ geometrisch darstellen, so kann man die Abbildung der Zahlentripel auf die Punkte des Raumes benutzen. Zu jedem Wertsystem x, y sucht man den Punkt, dessen Koordinaten der Reihe nach gleich x, y, $f(x, y)$ sind. Diese Punkte erfüllen eine Fläche, die Bildfläche der Funktion $f(x, y)$, und $z = f(x, y)$ ist die Gleichung dieser Fläche.

Erwähnt sei noch die geometrische Darstellung eines Paares von Funktionen einer Veränderlichen, $y = f(x)$, $z = g(x)$. Man erhält sie dadurch, daß man für jeden Wert von x den Punkt aufsucht, dessen Koordinaten der Reihe nach gleich x, $f(x)$, $g(x)$ sind. Diese Punkte erfüllen eine Kurve im Raum. Sie ist die Bildkurve des Funktionenpaares $f(x)$, $g(x)$.

Solche geometrischen Darstellungen wie die oben auseinandergesetzten spielen auch in den Naturwissenschaften und in der Technik eine wichtige Rolle. Gewöhnlich legt man die Koordinatenachsen so, daß sie zueinander rechtwinklig sind. Man spricht in diesem Falle von rechtwinkligen cartesischen Koordinaten.

§ 6. Die elementaren Funktionen.

Die m-te Potenz von x (m eine positive ganze Zahl) ist offenbar eine Funktion von x; denn zu jedem Wert von x gehört ein ganz bestimmter Wert von x^m. Wenn $a_0, a_1, \cdots, a_m$ Konstanten vorstellen, so ist auch

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1} x + a_m$$

*) In der Praxis muß man sich begnügen, dies für eine Anzahl von x-Werten auszuführen. Man erhält so eine angenäherte Darstellung der Bildkurve. Ähnliches gilt für die Bildfläche von $f(x, y)$.

eine Funktion von x. Eine solche Funktion heißt, wenn a_0 nicht null ist, eine ganze rationale Funktion m-ten Grades. Eine ganze rationale Funktion 0-ten Grades ist eine Konstante, ihre Bildkurve eine Parallele zur x-Achse. Die Bildkurve*) einer ganzen rationalen Funktion ersten Grades ist eine gerade Linie. Die Bildkurve einer ganzen rationalen Funktion zweiten Grades ist eine Parabel, eine Kurve, die der Leser von der Schule her kennen wird. Sie besteht aus allen Punkten, die von einer festen Geraden (der Leitlinie) und einem festen Punkt (dem Brennpunkt) gleich weit entfernt sind.

Ein Quotient aus zwei ganzen rationalen Funktionen, also ein Ausdruck von der Form

$$\frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1} x + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_{n-1} x + b_n}$$

wird als rationale Funktion bezeichnet. Einen Spezialfall davon bilden die ganzen rationalen Funktionen.

Die reellen Wurzeln einer algebraischen Gleichung

$$y^n + r_1(x) y^{n-1} + \cdots + r_{n-1}(x) y + r_n(x) = 0,$$

deren Koeffizienten $r_1(x), \ldots, r_n(x)$ rationale Funktionen von x sind, sind Funktionen von x, die man als algebraische Funktionen bezeichnet. Die rationalen Funktionen sind ein Spezialfall von ihnen ($n = 1$).

Außer den algebraischen Funktionen rechnen wir noch einige nichtalgebraische oder transzendente zu den elementaren Funktionen. Zunächst ist es die Exponentialfunktion a^x, wobei a eine positive Konstante bedeutet**), und die Funktion Logarithmus.

Zu jedem positiven x gehört ein y derart, daß $a^y = x$ ist***). y heißt der Logarithmus von x zur Basis a und wird ${}^a\log x$ geschrieben. Die gebräuchlichen Logarithmentafeln beziehen sich auf die Basis 10. Der Leser möge versuchen die Bildkurven von a^x und ${}^a\log x$ für den Fall $a = 10$ zu zeichnen.

---

*) Wir wollen ein rechtwinkliges Achsensystem zu Grunde legen. Der Leser zeichne die Bildkurven von $y = 3x + 4$, $y = x^2$, indem er Millimeterpapier benutzt.

**) a^x ist immer positiv.

***) a ist positiv, darf aber nicht gleich 1 sein.

Betrachten wir ein rechtwinkliges Achsensystem. Wenn wir die x-Achse um einen rechten Winkel drehen, so wird sie mit der y-Achse zusammenfallen, und wenn wir in geeignetem Sinn gedreht haben, werden auch die positiven Richtungen der Achsen zusammenfallen. Dieser Drehungssinn, der in Fig. 4 durch einen Pfeil angedeutet ist, soll der positive heißen, der andere der negative. Wir wollen jetzt um den Anfangspunkt einen Kreis beschreiben, dessen Radius die Längeneinheit ist. Man nennt ihn den Einheitskreis. Er schneidet auf der x-Achse einen Punkt A aus, so daß $\overline{OA} = 1$ ist. Der Punkt A kann sich auf dem Einheitskreis in zwei verschiedenen Weisen bewegen. Wenn der Radius OA sich in positivem Sinn dreht, so sagen wir, daß A sich auf dem Kreise in positivem Sinne bewegt, andernfalls in negativem Sinne.

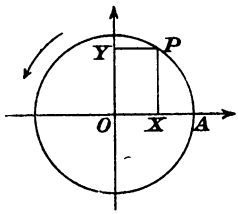


Fig. 4.

Beschreibt A, während er sich in positivem Sinne bewegt, ein Bogenstück von der Länge α, so sagen wir, daß er den Bogen α zurückgelegt hat; beschreibt A, während er sich in negativem Sinne bewegt, ein Bogenstück von der Länge α, so sagen wir, daß er den Bogen $-\alpha$ zurückgelegt hat.

Nach diesen Vorbereitungen ist es leicht, die beiden Funktionen Kosinus und Sinus, die der Leser aus der Trigonometrie kennt, zu definieren. Ist x gegeben, so lassen wir den Punkt A, den wir oben eingeführt haben, sich so bewegen, daß er den Bogen x zurücklegt. Er gelange dadurch nach P. Die Abszisse von P nennen wir $\cos x$ (Kosinus von x), die Ordinate $\sin x$ (Sinus von x). Es ist also

$$\overline{OX} = \cos x, \qquad \overline{OY} = \sin x.$$

Aus der Figur entnimmt man sofort die Relation

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Von großer Wichtigkeit sind die beiden folgenden Formeln:

$$\cos(x + x') = \cos x \cos x' - \sin x \sin x',$$

$$\sin(x + x') = \sin x \cos x' + \cos x \sin x',$$

die in der Elementarmathematik bewiesen werden.

$\cos x$ und $\sin x$ gehören zu den trigonometrischen Funktionen. Außer diesen beiden erwähnen wir noch die trigono-

metrischen Funktionen $\operatorname{tg} x$ (Tangens von x) und $\operatorname{cot} x$ (Kotangens von x), welche in folgender Weise definiert sind:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \operatorname{cot} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Wir empfehlen dem Leser die Bildkurven von $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cot} x$ zu zeichnen.

Es fehlen in der Aufzählung der elementaren Funktionen noch die sogenannten zyklometrischen Funktionen. Wenn x gegeben ist, so gibt es, falls x zwischen den Grenzen -1 und $+1$ liegt, immer zwischen 0 und*) π einen Bogen, dessen Kosinus gleich x ist. Ihn bezeichnet man mit $\operatorname{arc\,cos} x$ (Arkuskosinus x, d. h. der Bogen mit dem Kosinus x). Ebenso gibt es zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ einen Bogen, dessen Sinus gleich x ist. Ihn nennt man $\operatorname{arc\,sin} x$ (Arkussinus x, d. h. der Bogen mit dem Sinus x). In ähnlicher Weise werden $\operatorname{arc\,tg} x$ (Arkustangens x, d. h. der Bogen zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$, dessen Tangens gleich x ist) und $\operatorname{arc\,cot} x$ (Arkuskotangens x, d. h. der Bogen zwischen 0 und π, dessen Kotangens gleich x ist) definiert. Bei $\operatorname{arc\,tg} x$ und $\operatorname{arc\,cot} x$ darf x alle Werte annehmen, während bei $\operatorname{arc\,cos} x$ und $\operatorname{arc\,sin} x$ das x auf die Werte zwischen -1 und $+1$ (diese eingeschlossen) beschränkt war.

Auch diejenigen Funktionen, die sich aus einer endlichen Anzahl elementarer Funktionen zusammensetzen lassen, wie z. B. $\cos(ax+b)$, $\log(\sin^2 x)$ u. dgl., wollen wir elementare Funktionen nennen.

§ 7. Funktionen einer positiven ganzzahligen Veränderlichen. Zahlenfolgen.

y nannten wir eine Funktion von x, wenn zu jedem Wert von x ein Wert von y gehört. x braucht dabei keineswegs alle Werte anzunehmen, die es gibt; es kann vielmehr auf eine bestimmte Mannigfaltigkeit von Werten**) beschränkt sein. Diese Mannigfaltigkeit kann z. B. ein Intervall sein, d. h. aus allen Werten x bestehen, die den Ungleichungen $a \leqq x \leqq b$ genügen. Ein solches

*) π ist der halbe Umfang des Einheitskreises.
**) Auf der Zahlenlinie entspricht ihr eine Punktmenge.

Intervall*) bezeichnet man mit (a, b). Ist x nur an die Bedingung $x \geqq a$ oder an die Bedingung $x \leqq a$ gebunden, so spricht man von dem unendlichen Intervall (a, ∞) bzw. $(-\infty, a)$; das Zeichen ∞ liest man „Unendlich".

Die Mannigfaltigkeit von Werten (oder Wertmenge), in welcher x sich bewegt, kann aber auch von anderer Art sein, obwohl die oben betrachteten elementaren Funktionen alle in Intervallen definiert sind, z. B. arc cos x, arc sin x in $(-1, 1)$, $\log x$ im Innern des Intervalls $(0, \infty)$. Man kann sich für jede beliebige Wertmenge oder, wie man sich geometrisch ausdrückt, in jeder Punktmenge auf der Zahlenlinie**) eine Funktion definiert denken; es braucht ja nur jedem Punkt der Punktmenge ein Wert y zugeordnet zu sein; denn das allein liegt in dem Funktionsbegriff.

Wir wollen jetzt eine Funktion $u(x)$ betrachten, bei der x auf die positiven ganzen Zahlen 1, 2, 3, ... beschränkt ist***), und statt $u(n)$ wollen wir kürzer u_n schreiben; u_n ist also der Funktionswert, welcher zu $x = n$ gehört. Schreibt man die Funktionswerte nacheinander auf, wie sie den x-Werten 1, 2, 3, ... entsprechen, so erhält man:

$$u_1, u_2, u_3, \ldots$$

Das ist eine sogenannte Zahlenfolge oder kurz eine Folge.

Wir wollen einige Beispiele für Zahlenfolgen besprechen.

Euklid bildet am Anfang des zehnten Buches seiner Elemente eine Zahlenfolge, indem er von einer gegebenen positiven Größe mehr als die Hälfte, von dem Rest wieder mehr als die Hälfte u. s. f. wegnimmt. Er bildet also eine Zahlenfolge $u_1, u_2, u_3, \ldots$, bei der $0 < u_{n+1} < \frac{1}{2} u_n$ ist. Über diese Zahlenfolge beweist er einen Satz (Satz 1 des 10. Buches), auf den wir nachher noch zurückkommen werden.

Wenn man auf zwei inkommensurable positive Größen u_1 und u_2 das euklidische Teilerverfahren†) anwendet, so entsteht eine Folge

*) Auf der Zahlenlinie entspricht einem endlichen Intervall eine Strecke.

**) Dasselbe gilt für die Ebene und den Raum.

***) Eine Funktion von n positiven ganzzahligen Veränderlichen ist, wie man beweisen kann, nichts Allgemeineres als eine Funktion von einer solchen Veränderlichen.

†) Dieses besteht darin, daß man von der größeren u_1 so oft es geht die kleinere u_2 abzieht, den Rest u_3 so oft es geht von u_2, den so entstehenden Rest u_4 so oft es geht von u_3 usw. Ist z. B. $u_1 = 1$, $u_2 = \sqrt{2} - 1$, so lautet die Folge $u_1, u_2, u_3, \ldots$ so: 1, $(\sqrt{2} - 1)$, $(\sqrt{2} - 1)^2$, $(\sqrt{2} - 1)^3, \ldots$

$u_1, u_2, u_3, \ldots$, in welcher $u_{n+1} < u_n$ ist, ferner $u_{2n+2} < \frac{1}{2} u_{2n}$ und $u_{2n+1} < \frac{1}{2} u_{2n-1}$, so daß in diesem Falle $u_1, u_3, u_5, \ldots$ und $u_2, u_3, u_4, \ldots$, Folgen der soeben betrachteten Art sind.

Wenn man die Zahl $\frac{1}{9}$ bis auf eine, dann bis auf zwei, dann bis auf drei usw. Dezimalen berechnet, so erhält man die Zahlenfolge

$$0{,}1;\ 0{,}11;\ 0{,}111;\ 0{,}1111;\ \ldots.$$

Wenn man den Umfang des dem Einheitskreis einbeschriebenen regulären Vierecks, dann den des regulären 8-ecks, 16-ecks, 32-ecks usw. berechnet, so erhält man eine Zahlenfolge, die in der Elementargeometrie bei der angenäherten Berechnung der Zahl π vorkommt.

Es ist oft bequem statt einer Zahlenfolge $u_1, u_2, u_3, \ldots$ ihr geometrisches Bild auf der Zahlenlinie zu betrachten. Da jede Zahl u_n auf der Zahlenlinie durch einen Punkt P_n (den Punkt mit der Abszisse u_n) versinnlicht wird, so entspricht der Zahlenfolge eine Punktfolge $P_1, P_2, P_3, \ldots$ Statt von Zahlenfolgen zu reden, können wir also von Punktfolgen auf einer Geraden reden*).

§ 8. Häufungsstellen einer Zahlenfolge.

$P_1, P_2, P_3, \ldots$ sei eine Punktfolge auf der Zahlenlinie**). Ein Punkt Q heißt eine Häufungsstelle dieser Punktfolge, wenn in beliebiger Nähe von Q unendlich viele Punkte der Folge liegen***). Das hat folgenden Sinn: Konstruieren wir (Fig. 5) um Q als Mittelpunkt ein Intervall $Q'\,Q''$ und unterdrücken wir in der Punktfolge alle Punkte, die nicht in das Intervall $Q'\,Q''$ fallen, so bleibt noch

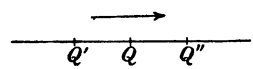


Fig. 5.

*) Eine Punktfolge in der Ebene ist äquivalent mit einer Folge von Zahlenpaaren: u_1, v_1; u_2, v_2; u_3, v_3; ... Eine Punktfolge im Raum ist äquivalent mit einer Folge von Zahlentripeln u_1, v_1, w_1; u_2, v_2, w_2; u_3, v_3, w_3; ...

**) Die Punkte der Folge brauchen keineswegs alle verschieden zu sein. Sie sind ja trotzdem mit Hilfe ihrer Indizes unterscheidbar. Z. B. ist $P, P, P, \ldots$ für uns auch eine Punktfolge. Sie hat die Häufungsstelle P.

***) Wenn $u_1, u_2, u_3, \ldots$ die zu $P_1, P_2, P_3, \ldots$ gehörige Zahlenfolge und u die Abszisse von Q ist, so sagen wir auch, u sei eine Häufungsstelle der Zahlenfolge.

eine Punktfolge übrig, (nicht etwa nur eine endliche Anzahl von Punkten); dies gilt immer, wie auch das Intervall $Q'\,Q''$ gewählt sein mag.

Es ist von großer Wichtigkeit, daß der Leser sich den Begriff Häufungsstelle völlig klar macht, weil dieser Begriff für das Folgende grundlegend ist.

§ 9. Beispiele.

Die Folge $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ hat die Häufungsstelle 0 (und sonst keine). Dasselbe gilt von den Zahlenfolgen Euklids, die wir oben erwähnt haben (S. 10). Die Folge 0,1; 0,11; 0,111; ... hat die Häufungsstelle $\frac{1}{9}$ und keine andere. Nimmt man den Umfang des dem Einheitskreis einbeschriebenen regulären 2^2-ecks, 2^3-ecks, ..., so entsteht eine Zahlenfolge, deren einzige Häufungsstelle 2π (der Umfang des Einheitskreises) ist. Die Folge $1, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{5}{4}, \frac{1}{5}, \frac{7}{6}, \frac{1}{7}, \ldots$ hat die beiden Häufungsstellen 0 und 1.

Es gibt auch Zahlenfolgen mit unendlich vielen Häufungsstellen, ja sogar solche, für welche jede Zahl eine Häufungsstelle ist. Jede rationale Zahl (d. h. jeden Bruch) können wir in der Form $\frac{p}{q}$ schreiben, wo p und q ganze Zahlen ohne gemeinsamen Teiler sind und q positiv ist. Ordnen wir diesem Bruch den Punkt mit den Koordinaten $x=q$, $y=p$ zu (in einem cartesischen Koordinatensystem), so erhalten wir in der Ebene eine Punktmenge P. In Fig. 6 sind die Punkte von P durch Kreuze markiert. Betrachten wir überhaupt alle Punkte mit ganzzahligen Koordinaten, so gehören zu ihnen die Punkte P. Die Punkte mit ganzzahligen Koordinaten lassen sich aber als Punktfolge schreiben. In der Figur ist durch die starkgezogene Schneckenlinie angegeben, wie die Punkte aufeinander folgen. Unterdrücken wir in dieser Folge alle Punkte, die nicht durch Kreuze markiert sind, so erhalten wir eine Punktfolge, die aus den Punkten von P besteht. Ersetzen wir jeden Punkt durch die zu ihm gehörige Zahl $\frac{p}{q}$, so erhalten wir eine Folge, in der alle rationalen Zahlen vorkommen und jede nur ein-

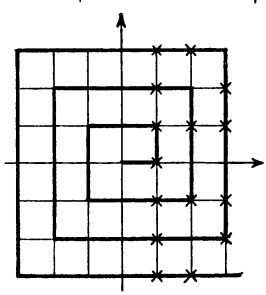


Fig. 6.

mal. In beliebiger Nähe jeder Zahl liegen aber unendlich viele rationale Zahlen. Also ist für unsere Folge jede Zahl eine Häufungsstelle.

§ 10. Satz von Weierstraß.

Liegt eine Zahlenfolge in einem endlichen Intervall, so hat sie wenigstens eine Häufungsstelle.

Die Zahlenfolge liege in dem Intervall (a, b), so daß also alle ihre Zahlen größer oder gleich a und kleiner oder gleich b sind. Wir nehmen eine ganze Zahl m, die kleiner als a ist, und wählen die ganze Zahl n so, daß $m+n$ größer als b ist. Dann liegen alle Zahlen der Folge zwischen den beiden ganzen Zahlen m und $m+n$.

Unter den Intervallen

$$(m, m+1),\ (m+1, m+2), \ldots,\ (m+n-1, m+n)$$

muß es nun wenigstens eins geben, welches unendlich viele Glieder der Folge enthält. Würde nämlich jedes dieser Intervalle nur eine endliche Anzahl solcher Glieder enthalten, so gäbe es auch in $(m, m+n)$ nur eine endliche Anzahl; wir wissen aber, daß zwischen m und $m+n$ alle Glieder der Folge liegen. Es gibt also sicher eine ganze Zahl k, so daß in das Intervall

$$\text{J)} \qquad (k, k+1)$$

unendlich viele Glieder der Folge fallen. Teilen wir J in zehn gleiche Teilintervalle

$$\left(k, k+\tfrac{1}{10}\right),\ \left(k+\tfrac{1}{10}, k+\tfrac{2}{10}\right), \cdots\cdots \left(k+\tfrac{9}{10}, k+1\right),$$

so muß es unter ihnen wenigstens eins geben, etwa

$$\text{J}_1) \qquad \left(k+\tfrac{k_1}{10}, k+\tfrac{k_1+1}{10}\right),$$

welches ebenso wie J unendlich viele Glieder der Folge enthält. Unter den zehn gleichen Teilintervallen von J_1:

$$\left(k+\tfrac{k_1}{10}, k+\tfrac{k_1}{10}+\tfrac{1}{100}\right), \cdots\cdots, \left(k+\tfrac{k_1}{10}+\tfrac{9}{100}, k+\tfrac{k_1+1}{10}\right)$$

muß es wieder eins geben, etwa

$$\text{J}_2) \qquad \left(k+\tfrac{k_1}{10}+\tfrac{k_2}{100}, k+\tfrac{k_1}{10}+\tfrac{k_2+1}{100}\right),$$

worin wie in J und J_1 unendlich viele Glieder unserer Folge liegen. So können wir unbegrenzt fortfahren. Die Zahlen k_1, k_2, k_3, . . . die dabei auftreten, gehören sämtlich der Reihe 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 an.

Der Leser ist daran gewöhnt jeden unendlichen Dezimalbruch als eine Zahl zu betrachten.

Nehmen wir nun die Zahl

$$u = k + 0,\ k_1 k_2 k_3 \ldots ,$$

so erweist sie sich als eine Häufungsstelle unserer Zahlenfolge. Denn u liegt in dem Intervall J_n, dessen Länge gleich $\left(\frac{1}{10}\right)^n$ ist. Konstruiert man um u als Mitte ein beliebiges Intervall $(u - \varepsilon,\ u + \varepsilon)$, so wird, wenn man n genügend groß wählt, J_n in diesem Intervall enthalten sein. In J_n liegen aber unendlich viele Zahlen der Folge, mithin auch in $(u - \varepsilon,\ u + \varepsilon)$.

§ 11. Konvergente Zahlenfolgen. Grenzwerte.

Auf Grund des Weierstraßschen Satzes wissen wir, daß eine in einem endlichen Intervall (a, b) befindliche Zahlenfolge u_1, u_2, u_3, . . . wenigstens eine Häufungsstelle hat. Wir wollen jetzt den ausgezeichneten Fall betrachten, daß nur eine Häufungsstelle da ist (die wir u nennen). Konstruieren wir um u als Mitte ein beliebiges Intervall $(u - \varepsilon,\ u + \varepsilon)$, so kann außerhalb desselben nur eine endliche Anzahl von Gliedern der Folge liegen. Bliebe nämlich nach Unterdrückung aller Glieder, die in $(u - \varepsilon,\ u + \varepsilon)$ enthalten sind, noch eine Folge übrig, so hätte diese nach dem Weierstraßschen Satze eine Häufungsstelle, die sicher von u verschieden wäre. Die ursprüngliche Folge hätte dann mehr als eine Häufungsstelle gegen die Voraussetzung. Wir können somit folgendes aussagen:

Wählt man eine beliebige positive Größe ε, so liegen **mit einer endlichen Anzahl von Ausnahmen alle** Glieder der Folge zwischen $u - \varepsilon$ und $u + \varepsilon$.

Wenn die Glieder einer Folge mit einer endlichen Anzahl von Ausnahmen eine gewisse Eigenschaft haben, so wollen wir kurz sagen, daß „fast alle" Glieder der Folge diese Eigenschaft haben.

Wir können demnach unsere obige Aussage auch so formulieren:

„Fast alle" Glieder der Folge erfüllen die Ungleichung*)

$$|u - u_n| < \varepsilon,$$

wie auch die positive Größe ε gewählt sein mag.

Steht eine Folge $u_1, u_2, u_3, \cdots$ zu einer Zahl u in der angegebenen Beziehung, so nennt man sie konvergent und sagt, daß u ihr Grenzwert ist, oder auch, daß die Folge nach u konvergiert, oder endlich, daß u_n bei unendlich zunehmendem n nach u konvergiert (den Grenzwert u hat, dem Grenzwert u zustrebt). Man drückt dies durch die Formel aus:

$$\lim_{n=\infty} u_n = u.$$

lim ist der Anfang des lateinischen Wortes limes (Grenze). Man liest die Formel so: limes u_n (oder limes von u_n) für unendliches n gleich u.

Die oben erwähnten Zahlenfolgen Euklids konvergieren (wie er selbst in Satz 1 und Satz 2 des 10. Buches beweist) nach 0. Der Umfang des dem Einheitskreis einbeschriebenen regulären 2^n-ecks konvergiert bei unendlich zunehmendem n nach 2π.

Jetzt wollen wir noch zeigen, daß die zu Anfang betrachteten Folgen (die in einem endlichen Intervall liegen und nur eine Häufungsstelle haben) die einzigen konvergenten Folgen sind.

$u_1, u_2, u_3, \ldots$ sei eine konvergente Zahlenfolge mit dem Grenzwert u. Wir wissen, daß alle Glieder der Folge mit einer endlichen Anzahl von Ausnahmen zwischen $u - \varepsilon$ und $u + \varepsilon$ liegen. Wählen wir nun a kleiner als die Ausnahmeglieder und zugleich kleiner als $u - \varepsilon$, ferner b größer als die Ausnahmeglieder und zugleich größer als $u + \varepsilon$, so liegen alle Glieder der Folge zwischen a und b. Gäbe es außer u (welches offenbar eine Häufungsstelle ist) noch eine andere Häufungsstelle v, so müßten unendlich viele Glieder der Folge zwischen $v - \varepsilon$ und $v + \varepsilon$ liegen. Ist ε so klein, daß die Intervalle $(u - \varepsilon, u + \varepsilon)$ und $(v - \varepsilon, v + \varepsilon)$ ganz getrennt sind, so kann das nicht sein, weil außerhalb von $(u - \varepsilon, u + \varepsilon)$ nur eine endliche Anzahl von Gliedern der Folge liegt. u ist also die einzige Häufungsstelle.

Bemerkungen. Wenn die Folge $u_1, u_2, u_3, \ldots$ nach u konvergiert, und man fügt eine endliche Anzahl beliebiger Glieder

*) Mit $|x|$ bezeichnet man den absoluten Betrag von x. Es ist also $|x| = x$, wenn x positiv, $|x| = -x$, wenn x negativ ist.

hinzu, so entsteht eine neue Folge, die auch nach u konvergiert. In der Tat liegen die Glieder der neuen Folge, ebenso wie die der alten, „fast alle" zwischen $u-\varepsilon$ und $u+\varepsilon$.

Unterdrückt man in $u_1, u_2, u_3, \ldots$ eine endliche Anzahl von Gliedern (oder auch unendlich viele, aber so, daß noch unendlich viele übrig bleiben), so konvergiert die neue Folge auch nach u.

Eine konvergente Folge bleibt konvergent und behält denselben Grenzwert, wenn man die Reihenfolge der Glieder ändert.

Ist $\lim u_n = c$ und $\lim v_n = c$, so hat auch die Folge $u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, \ldots$ den Grenzwert c.

§ 12. Einfachste Sätze über Grenzwerte.

1. Wenn

$$\lim u_n = u, \qquad \lim v_n = v$$

ist*), so wird

$$\lim (u_n + v_n) = u + v.$$

Es liegen nämlich „fast alle" u_n zwischen $u-\frac{\varepsilon}{2}$ und $u+\frac{\varepsilon}{2}$**), ebenso „fast alle" v_n zwischen $v-\frac{\varepsilon}{2}$ und $v+\frac{\varepsilon}{2}$, folglich „fast alle" u_n+v_n zwischen $(u+v)-\varepsilon$ und $(u+v)+\varepsilon$.

2. Wenn

$$\lim u_n = u, \qquad \lim v_n = v$$

ist, so wird

$$\lim (u_n \cdot v_n) = u \cdot v.$$

„Fast alle" u_n, v_n erfüllen die Ungleichungen

$$|u-u_n| < \varepsilon, \qquad |v-v_n| < \varepsilon.$$

Nun ist

$$uv - u_n v_n = (u-u_n)\,v + (v-v_n)\,u_n,$$

also***)

$$|uv - u_n v_n| \leqq |u-u_n|\,|v| + |v-v_n|\,|u_n|$$
$$\leqq |u-u_n|\,|v| + |v-v_n|\,|u| + |u-u_n|\,|v-v_n|.$$

---

*) Wir lassen der Kürze halber $n = \infty$ unter dem Symbol lim fort.

**) ε ist eine beliebig gewählte positive Größe.

***) Wir benutzen hier den leicht beweisbaren Satz: $|a+b| \leqq |a| + |b|$. Daraus folgt auch (weil $u_n = u + u_n - u$ ist) $|u_n| \leqq |u| + |u-u_n|$.

„Fast alle" Produkte $u_n v_n$ erfüllen somit die Ungleichung

$$|uv - u_n v_n| \leqq \varepsilon (|u| + |v|) + \varepsilon^2.$$

Wählen wir, wenn ε' eine beliebig gegebene Größe ist, ε kleiner als 1 und kleiner als ε': $(|u| + |v| + 1)$, so wird für „fast alle" $u_n v_n$

$$|uv - u_n v_n| < \varepsilon'.$$

Folgerungen. Wenn a eine Konstante und $\lim u_n = u$ ist, so wird $\lim (a \cdot u_n) = a \cdot u$. Man braucht nur in dem Obigen alle v_n gleich a, also auch v gleich a, anzunehmen. Setzt man $a = -1$, so ergibt sich $\lim (-u_n) = -u$. Mit Hilfe von Satz 1 folgt $\lim (u_n - v_n) = u - v$, falls $\lim u_n = u$, $\lim v_n = v$ ist.

3. Wenn

$$\lim u_n = u \text{ und } u \text{ nicht null}$$

ist, so wird*)

$$\lim \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u}.$$

Wir wählen die positive Größe ε kleiner als $\frac{1}{2}|u|$, aber sonst beliebig. Dann erfüllen „fast alle" u_n die Ungleichung

$$|u - u_n| < \varepsilon;$$

diese u_n sind (weil $\varepsilon < \frac{1}{2}|u|$) ihrem Betrage nach größer als $\frac{1}{2}|u|$. Dividieren wir also durch $|u|\,|u_n|$, so ergibt sich

$$\left|\frac{1}{u} - \frac{1}{u_n}\right| < \frac{\varepsilon}{|u|\,|u_n|} < \frac{2\varepsilon}{u^2}.$$

Ist ε' eine beliebig gegebene positive Größe, so brauchen wir nur $\varepsilon < \frac{\varepsilon' u^2}{2}$ zu machen, um zu erreichen, daß für „fast alle" u_n

$$\left|\frac{1}{u} - \frac{1}{u_n}\right| < \varepsilon'$$

wird.

Folgerung. Wenn $\lim u_n = u$, $\lim v_n = v$ und u ungleich Null ist, so hat man

$$\lim \frac{v_n}{u_n} = \frac{v}{u}.$$

*) Alle u_n seien ungleich Null.

In der Tat ist

$$\frac{v_n}{u_n} = v_n \cdot \frac{1}{u_n}$$

also nach Satz 2 und 3

$$\lim \frac{v_n}{u_n} = v \cdot \frac{1}{u} = \frac{v}{u}.$$

Die oben bewiesenen Sätze sagen aus, daß der Grenzwert einer Summe gleich der Summe der Grenzwerte, der Grenzwert einer Differenz gleich der Differenz der Grenzwerte, der Grenzwert eines Produktes gleich dem Produkt der Grenzwerte, der Grenzwert eines Quotienten gleich dem Quotienten der Grenzwerte ist (falls der Nenner dieses letzten Quotienten nicht verschwindet). Der Summen- und der Produktsatz lassen sich leicht für eine beliebige endliche Anzahl von Summanden bzw. Faktoren beweisen. Z. B. folgt aus

$$\lim u_n = u, \quad \lim v_n = v, \quad \lim w_n = w$$

zunächst:

$$\lim (v_n + w_n) = v + w, \quad \lim (v_n \cdot w_n) = v \cdot w$$

und dann:

$$\begin{aligned} \lim (u_n + v_n + w_n) &= \lim \{u_n + (v_n + w_n)\} \\ &= u + (v + w) = u + v + w, \\ \lim (u_n \cdot v_n \cdot w_n) &= \lim \{u_n \cdot (v_n \cdot w_n)\} \\ &= u \cdot (v \cdot w) = u \cdot v \cdot w. \end{aligned}$$

§ 13. Eine Eigenschaft der rationalen Funktionen.

Wir wollen zunächst eine ganze rationale Funktion

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1} x + a_m$$

betrachten. Ist $x_1, x_2, x_3, \ldots$ eine Zahlenfolge, die nach x konvergiert, d. h. ist $\lim x_n = x$, so ergibt sich aus den obigen Sätzen, daß

$$\lim f(x_n) = f(x)$$

ist. Wir nennen eine Funktion $f(x)$ für den Wert x*) **stetig**,

*) Oder an der Stelle x.

wenn aus $\lim x_n = x$ **immer** $\lim f(x_n) = f(x)$ folgt.*) Demnach dürfen wir sagen, daß die ganzen rationalen Funktionen durchweg (d. h. für jeden Wert von x) stetig sind.

Bilden wir nun einen Quotienten aus zwei ganzen rationalen Funktionen, z. B. aus $f(x)$ und aus

$$g(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_{n-1} x + b_n,$$

so erhalten wir die rationale Funktion $f(x) : g(x)$. Ist x ein Wert, für welchen $g(x)$ nicht verschwindet, so folgt aus $\lim x_n = x$

$$\lim \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Eine rationale Funktion ist also für jeden Wert x stetig, der ihren Nenner nicht zum Verschwinden bringt.

Solche Werte x, für welche eine Funktion nicht stetig (oder, wie man sagt, unstetig) ist, nennt man Unstetigkeitsstellen der Funktion. Da $g(x)$ höchstens für n Werte von x verschwindet, so hat eine rationale Funktion nur eine endliche Anzahl von Unstetigkeitsstellen.

§ 14. Stetigkeit von $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cot} x$.

Aus der Definition von $\sin x$ und $\cos x$ ergibt sich leicht, daß

$$\lim \sin u_n = 0, \qquad \lim \cos u_n = 1$$

wird, falls $\lim u_n = 0$ ist. Hieraus folgt mit Hilfe der Formeln für $\cos(x + x')$ und $\sin(x + x')$ auf Seite 8 die Stetigkeit von $\sin x$ und $\cos x$ für jeden Wert von x. Ist nämlich $\lim x_n = x$ und setzt man $x_n = x + u_n$, so wird $\lim u_n = 0$ sein. Nun hat man aber nach den zitierten Formeln

$$\sin x_n = \sin x \cos u_n + \cos x \sin u_n,$$

$$\cos x_n = \cos x \cos u_n - \sin x \sin u_n,$$

folglich

$$\lim \sin x_n = \sin x, \qquad \lim \cos x_n = \cos x.$$

Auch $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ ist überall stetig mit Ausnahme der Stellen,

*) Wenn $f(x)$ und $g(x)$ an der Stelle x stetig sind, so gilt dasselbe von $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$; im letzten Falle muß nur $g(x) \gtrless 0$ sein. Das ergibt sich aus den Sätzen des § 12.

an welchen $\cos x$ verschwindet. $\cos x$ verschwindet aber nur für die ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$ (d. h. für $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \cdots$ und für $x = -\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}, \cdots$). Die ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$ sind also die einzigen Unstetigkeitsstellen von $\operatorname{tg} x$.

Ebenso sind die Vielfachen von π die einzigen Unstetigkeitsstellen von $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

Auf die Stetigkeit der übrigen elementaren Funktionen kommen wir später zu sprechen.

§ 15. Monotone Folgen.

Eine Folge $u_1, u_2, u_3, \ldots$ heißt **aufsteigend**, wenn $u_1 \leqq u_2 \leqq u_3 \leqq \ldots$, wenn also kein Glied größer ist als das folgende. Sie heißt **absteigend**, wenn $u_1 \geqq u_2 \geqq u_3 \geqq \ldots$, wenn also kein Glied kleiner ist als das folgende. Beide Arten von Folgen bezeichnet man als **monotone** Folgen.

Es genügt, sich mit den aufsteigenden Folgen zu beschäftigen, Ist nämlich $u_1, u_2, u_3, \ldots$ eine absteigende Folge, so ist $-u_1, -u_2, -u_3, \ldots$ eine aufsteigende. Die Sätze über aufsteigende Folgen lassen sich daher sofort auf absteigende übertragen.

Ist $u_1, u_2, u_3, \ldots$ eine aufsteigende Folge, so kann es passieren, daß sie in einem endlichen Intervall liegt. Das ist der Fall, wenn sich eine Größe g angeben läßt, die alle u_n übertrifft; dann liegen nämlich alle u_n in dem Intervall (u_1, g). Wenn es kein solches g gibt, so wird jede (noch so große) Zahl von „fast allen" u_n übertroffen. Man sagt alsdann, daß u_n mit zunehmendem n **über alle Grenzen wächst** (nach Unendlich konvergiert) und schreibt $\lim\limits_{n=\infty} u_n = \infty$.

Wir wollen uns jetzt mit dem Fall beschäftigen, daß eine Zahl g existiert, die alle Glieder der aufsteigenden Folge $u_1, u_2, u_3, \ldots$ übertrifft. Die Folge liegt dann in einem endlichen Intervall. Sie hat also nach dem **Weierstraßschen** Satze eine Häufungsstelle u. Dieses u darf von keinem u_n übertroffen werden. Wäre z. B. $u_\nu > u$, so könnten wir eine positive Größe ε wählen, die kleiner als $u_\nu - u$ ist. In das Intervall $(u - \varepsilon,\ u + \varepsilon)$ würde dann nur eine endliche Anzahl von Gliedern der Folge fallen, weil u_ν und um so mehr alle folgenden u_n größer als $u + \varepsilon$. Das widerspricht aber

der charakteristischen Eigenschaft einer Häufungsstelle. Es darf also kein Glied der Folge größer als u sein. Hätte unsere Folge nun zwei Häufungsstellen u und v $(v > u)$, so würden, wenn ε positiv und kleiner als $v - u$ ist, in dem Intervall $(v - \varepsilon, v + \varepsilon)$ keine Glieder der Folge liegen. Das ist aber bei einer Häufungsstelle unmöglich. Unsere Folge hat also nur die eine Häufungsstelle u und es ist dann, wie wir wissen, $\lim u_n = u$. Damit ist folgender Satz bewiesen:

Eine monotone Zahlenfolge $u_1, u_2, u_3, \ldots$, die in einem endlichen Intervall liegt, ist immer konvergent.

Ist u ihr Grenzwert, so hat man $u_n \leqq u$, wenn die Folge aufsteigend, und $u_n \geqq u$, wenn sie absteigend ist.

§ 16. Beispiele.

1. a sei eine positive Größe. Wir wollen die 0-te, 1-te, 2-te, 3-te, ... Potenz von a bilden. Dadurch entsteht die Folge

$$1, a, a^2, a^3, \ldots$$

Wenn $a = 1$ ist, reduziert sie sich auf

$$1, 1, 1, 1, \ldots,$$

hat also den Grenzwert 1.

Wenn $a < 1$ ist, so ist unsere Folge eine absteigende. Da sie überdies in dem Intervall $(0, 1)$ liegt, so ist sie konvergent. Hat man nun

$$\lim a^n = b,$$

so ist offenbar auch

$$\lim a^{n-1} = b.$$

Andererseits ist

$$\lim a^n = \lim (a \cdot a^{n-1}) = a \cdot \lim a^{n-1},$$

also

$$b = a\,b \text{ oder } b\,(1 - a) = 0$$

Da $a < 1$, so folgt $b = 0$. Damit ist bewiesen:

$$\lim a^n = 0. \qquad (0 < a < 1)$$

Wenn $a > 1$ ist, so wächst a^n bei zunehmendem n über alle Grenzen. Gäbe es nämlich eine Zahl g, so daß immer $a^n < g$

bliebe, dann wäre

$$\left(\frac{1}{a}\right)^n > \frac{1}{g},$$

während doch (wie wir wissen)

$$\lim \left(\frac{1}{a}\right)^n = 0$$

ist.

2. Bevor wir ein weiteres Beispiel behandeln, wollen wir den folgenden Hilfssatz beweisen, den man auch zur Erledigung des ersten Beispiels benutzen kann.

Wenn $1+h > 0$ und $h \gtrless 0$ ist*), so gilt für $n = 2, 3, \ldots$ die Ungleichung

$$(1+h)^n > 1+nh.$$

Wir benutzen zum Beweise die sogenannte „vollständige Induktion". Zunächst überzeugen wir uns, daß die Ungleichung im Falle $n = 2$ richtig ist. In der Tat hat man

$$(1+h)^2 = 1+2h+h^2 > 1+2h.$$

Sodann beweisen wir, daß die Ungleichung für den Fall $n+1$ gilt, wenn sie für den Fall n richtig ist. Multiplizieren wir die als richtig angenommene Ungleichung

$$(1+h)^n > 1+nh$$

auf beiden Seiten mit $1+h$, so kommt

$$(1+h)^{n+1} > (1+h)(1+nh) = 1+(n+1)h+nh^2,$$

also

$$(1+h)^{n+1} > 1+(n+1)h.$$

Jetzt dürfen wir unsern Hilfssatz als bewiesen betrachten, und wir wissen also, daß die Ungleichung $(1+h)^n > 1+nh$ sicher gilt, wenn n eine der Zahlen 2, 3, 4, ... ist und h den Bedingungen $1+h > 0$ und $h \gtrless 0$ genügt.

Diese Bedingungen sind erfüllt, wenn wir in der angegebenen Ungleichung $h = -\frac{1}{n^2}$ setzen. Dann erhalten wir aber

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n > 1-\frac{1}{n}$$

*) Der Fall ist $h = 0$ ist trivial.

oder*)

$$\frac{(n-1)^n\,(n+1)^n}{n^{2n}} > \frac{n-1}{n}$$

oder endlich

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n > \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}$$

d. h.

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \quad (\text{für } n=2, 3, 4, \ldots)$$

Daraus ergibt sich, daß die Folge

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1,\ \left(1+\frac{1}{2}\right)^2,\ \left(1+\frac{1}{3}\right)^3, \ldots$$

eine aufsteigende ist.

Setzen wir in unserer Ungleichung $(1+h)^n > 1+nh$, worin wie bisher n eine der Zahlen 2, 3, 4, ... ist, $h=\frac{1}{n^2-1}$, so sind die Bedingungen $1+h>0$ und $h \gtrless 0$ erfüllt, und wir erhalten:

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1+\frac{n}{n^2-1}$$

oder, da

$$\frac{n}{n^2-1} > \frac{n}{n^2}$$

ist,

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1+\frac{1}{n},$$

d. h.

$$\frac{n^{2n}}{(n-1)^n\,(n+1)^n} > \frac{n+1}{n},$$

also

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \cdot \quad (\text{für } n=2, 3, 4, \ldots)$$

Daraus ergibt sich, daß die Folge

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^2,\ \left(1+\frac{1}{2}\right)^3,\ \left(1+\frac{1}{3}\right)^4, \ldots$$

eine absteigende ist.

Diese absteigende Folge liegt in dem Intervall (0, 4). Sie

*) Wir benutzen hier, daß $a^2-b^2=(a-b)\,(a+b)$ ist.

ist also konvergent. Ihren Grenzwert wollen wir mit e bezeichnen:

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e\,.$$

Nun ist

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$$

also auch*)

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e\,,$$

weil

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\,.$$

Wir haben jetzt eine aufsteigende und eine absteigende Folge, die beide nach e konvergieren. Die Zahl e spielt in der höheren Analysis eine wichtige Rolle. Man benutzt sie als Basis eines Logarithmensystems; diese Logarithmen heißen die natürlichen Logarithmen; der natürliche Logarithmus einer Zahl x ist also diejenige Zahl y, welche die Gleichung $e^y=x$ erfüllt. Erst später werden wir einen bequemen Weg zur angenäherten Berechnung von e finden. Jetzt wissen wir nur, daß e zwischen

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\text{ und }\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

liegt. Diese Zahlen sind aber für große Werte von n unbequem zu berechnen. Auf 6 Dezimalen berechnet wird e gleich 2, 718 281.

Denken wir uns, daß der Zinsfuß 4 Prozent beträgt und daß nicht erst nach einem Jahr, sondern schon immer nach $\frac{1}{n}$ Jahr die Zinsen zum Kapital geschlagen und mit verzinst werden. 1 Mark wächst dann in $\frac{1}{n}$ Jahr zu $1+\frac{0{,}04}{n}$, in 1 Jahr zu $\left(1+\frac{1}{25n}\right)^{n}$ Mark und in 25 Jahren zu

$$\left(1+\frac{1}{25n}\right)^{25n}\text{ Mark.}$$

Lassen wir n unbegrenzt zunehmen, so konvergiert diese Summe gegen e Mark. 1 Mark wächst also in 25 Jahren zu e Mark an,

*) Wir benutzen hier den Satz vom Grenzwert eines Quotienten.

wenn sozusagen in jedem Augenblick die Zinsen zum Kapital geschlagen und mit verzinst werden und der Zinsfuß 4 Prozent beträgt. Diese Bedeutung hat die Zahl e.

3. $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sei eine Folge positiver Zahlen, die nicht ganz zu sein brauchen, und es sei $\lim a_n = \infty$ *).

Wir wollen die Folge

$$\left(1+\frac{1}{a_1}\right)^{a_1}, \left(1+\frac{1}{a_2}\right)^{a_2}, \left(1+\frac{1}{a_3}\right)^{a_3}, \ldots$$

untersuchen.

ν_n sei die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich a_n ist. Dann hat man, weil

$$0 \leqq a_n - \nu_n < 1,$$

auch $\lim \nu_n = \infty$. Nun ist aber

$$1+\frac{1}{\nu_n+1} < 1+\frac{1}{a_n} \leqq 1+\frac{1}{\nu_n},$$

also

$$\left(1+\frac{1}{\nu_n+1}\right)^{a_n} < \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \leqq \left(1+\frac{1}{\nu_n}\right)^{a_n}$$

und um so mehr

$$\left(1+\frac{1}{\nu_n+1}\right)^{\nu_n} < \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} < \left(1+\frac{1}{\nu_n}\right)^{\nu_n+1}.$$

Da

$$\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m} \text{ und } \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1},$$

unter m eine ganze Zahl verstanden, bei unendlich zunehmendem m nach e konvergieren, weil sie gleich

$$\frac{\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}}{1+\frac{1}{m+1}} \quad \text{bzw.} \quad \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\left(1+\frac{1}{m}\right)$$

sind, so liegen diese Größen „fast alle" zwischen $e-\varepsilon$ und $e+\varepsilon$. Dasselbe gilt also, weil $\lim \nu_n = \infty$ ist, auch von den Größen

$$\left(1+\frac{1}{\nu_n+1}\right)^{\nu_n} \text{ und } \left(1+\frac{1}{\nu_n}\right)^{\nu_n+1},$$

*) Das bedeutet, daß jede Zahl g von „fast allen" a_n übertroffen wird.

mithin auch von den Größen

$$\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}.$$

Da dies für jedes positive ε zutrifft, so ist

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e.$$

4. $b_1, b_2, b_3, \ldots$ sei eine Folge negativer Zahlen (von denen keine gleich -1 ist) und es sei $\lim b_n=-\infty$ *). Die b_n brauchen nicht ganze Zahlen zu sein.

Wir wollen die Folge

$$\left(1+\frac{1}{b_1}\right)^{b_1},\ \left(1+\frac{1}{b_2}\right)^{b_2},\ \left(1+\frac{1}{b_3}\right)^{b_3},\ \ldots$$

betrachten. Setzen wir $b_n=-(1+a_n)$, so wird

$$\left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n}=\left(\frac{a_n}{a_n+1}\right)^{-(a_n+1)}=\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}\left(1+\frac{1}{a_n}\right),$$

also, da $\lim a_n=\infty$ ist,

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n}=e$$

Alles in allem können wir sagen, daß $\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}$ dem Grenzwert e zustrebt, wenn ω irgendwie (d. h. irgend eine Folge durchlaufend) nach ∞ oder nach $-\infty$ konvergiert. Es genügt sogar, daß $|\omega|$ nach ∞ konvergiert. Setzt man $\frac{1}{\omega}=h$, so konvergiert h (ohne jemals selbst null zu werden) nach Null und man hat

$$\lim\left\{(1+h)^{\frac{1}{h}}\right\}=e.$$

5. Wir wollen $a>1$ annehmen und die Folge betrachten:

$$a;\ a^{\frac{1}{2}};\ a^{\frac{1}{3}},\ \ldots$$

Setzen wir

$$a^{\frac{1}{n}}=1+b_n,$$

so ist $b_n>0$ und

$$a=(1+b_n)^n>1+nb_n$$

(nach der in Nr. 2 bewiesenen Ungleichung).

*) d. h. $\lim(-b_n)=\infty$.

Hieraus folgt aber

$$b_n < \frac{a-1}{n} \text{ und } \lim b_n = 0 .$$

Mithin ist

$$\lim a^{\frac{1}{n}} = 1 .$$

Hat man $0 < a < 1$, so wird $\frac{1}{a} > 1$, mithin $\lim \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$, also auch wieder $\lim a^{\frac{1}{n}} = 1$.

Im Falle $a > 1$ ist die Folge $a, a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{1}{3}}, \ldots$ absteigend, im Falle $0 < a < 1$ aufsteigend. In Falle $a = 1$ lautet sie $1, 1, 1, \ldots$, und es ist auch hier $\lim a^{\frac{1}{n}} = 1$.

Wir wollen jetzt $a > 1$ annehmen und unter $h_1, h_2, h_3, \ldots$ eine Folge positiver Zahlen mit dem Grenzwert 0 verstehen, so daß also $\lim h_n = 0$ ist. Die ganze Zahl ν sei so gewählt, daß $a^{\frac{1}{\nu}} < 1 + \varepsilon$ ist. Da es nur eine endliche Anzahl von h_n gibt, die der Ungleichung $h_n \geqq \frac{1}{\nu}$ genügen, so werden die Größen a^{h_n} „fast alle" den Ungleichungen

$$1 < a^{h_n} < a^{\frac{1}{\nu}} < 1 + \varepsilon$$

genügen. Das bedeutet aber, daß $\lim a^{h_n} = 1$ ist. Der Fall $0 < a < 1$ erledigt sich wie oben. Besteht die nach Null konvergierende Folge $h_1', h_2', h_3', \ldots$ aus lauter negativen Gliedern, so setzen wir $h_n' = -h_n$. Dann ist $h_n > 0$,

$$a^{h_n'} = \frac{1}{a^{h_n}} \text{ und } \lim a^{h_n'} = 1 .$$

Wir sehen, daß a^h $(a > 0)$ immer dem Grenzwert 1 zustrebt, wie auch h nach Null konvergieren mag.

Auf Grund dieses Ergebnisses sind wir imstande zu beweisen, daß die Funktion a^x durchweg stetig ist. Hat man nämlich $\lim x_n = x$ und setzt man $x_n = x + h_n$, so ist $\lim h_n = 0$. Nun wird aber

$$\lim a^{x_n} = \lim \left(a^x \cdot a^{h_n}\right) = a^x \lim a^{h_n} = a^x .$$

Damit ist die Stetigkeit von a^x an der Stelle x bewiesen.

Die Funktion $y = {}^a\log x$ definierten wir durch die Gleichung $a^y = x$. Wir wollen, wie es üblich ist, die Basis a größer als 1 annehmen. Es sei nun $\lim x_n = x$ und alle x_n größer (kleiner) als x*), folglich die zugehörigen Logarithmen y_n größer (kleiner) als der Logarithmus y von x**). Wenn es nun unendlich viele y_n gäbe, die größer als $y + \varepsilon$ (kleiner als $y - \varepsilon$) sind, so wären die entsprechenden x_n größer als $a^{y+\varepsilon}$ (kleiner als $a^{y-\varepsilon}$), was wegen $\lim x_n = x$ unmöglich ist. Die Funktion ${}^a\log x$ ist also für jeden positiven Wert von x stetig.

6. $h_1, h_2, h_3, \ldots$ sei eine Zahlenfolge mit dem Grenzwert 0, es sei also $\lim h_n = 0$. Ferner sei $a > 0$. Wir bilden die Folge

$$\frac{a^{h_1}-1}{h_1}, \quad \frac{a^{h_2}-1}{h_2}, \quad \frac{a^{h_3}-1}{h_3}, \ldots ***)$$

Setzen wir

$$a^{h_n} = 1 + \varepsilon_n$$

so ist, wie wir wissen $\lim \varepsilon_n = 0$. Durch Logarithmieren ergibt sich:

$$h_n \log a = \log(1 + \varepsilon_n);$$

wir wollen als Basis die Zahl e benutzen, also mit natürlichen Logarithmen operieren; log bedeutet demnach soviel wie ${}^e\log$. Nach diesen Vorbereitungen wird

$$\frac{a^{h_n}-1}{h_n} = \frac{\varepsilon_n \log a}{\log(1+\varepsilon_n)} = \frac{\log a}{\log\left\{(1+\varepsilon_n)^{\frac{1}{\varepsilon_n}}\right\}},$$

und wir erhalten

$$\lim \frac{a^{h_n}-1}{h_n} = \log a \frac{1}{\lim \log\left\{(1+\varepsilon_n)^{\frac{1}{\varepsilon_n}}\right\}} = \log a.$$

Hierzu haben wir benutzt, daß $(1+\varepsilon_n)^{\frac{1}{\varepsilon_n}}$ den Grenzwert e hat und daß $\log x$ an der Stelle $x = e$ stetig ist.

Wir haben also den folgenden Satz:

$\frac{a^h - 1}{h}$ $(a > 0)$ strebt dem Grenzwert $\log a$ (natürlicher

*) Es genügt solche Folgen zu betrachten.

**) x und die sämtlichen x_n seien positiv.

***) Wir schließen aus, daß irgend ein h_n gleich Null ist. Dann sind auch alle ε_n ungleich Null.

Logarithmus von a) zu, wenn h irgendwie nach Null konvergiert (ohne selbst den Wert Null anzunehmen).

Wir haben hier ein (praktisch allerdings wenig brauchbares) Mittel zur Berechnung der natürlichen Logarithmen gewonnen.

7. $h_1, h_2, h_3, \ldots$ sei eine Folge positiver Größen mit dem Grenzwert 0. Wir wollen annehmen, daß sie alle kleiner als $\frac{\pi}{2}$ sind, also kleiner als ein Viertel von dem Umfang des Einheitskreises.

In Fig. 7 ist der Einheitskreis dargestellt. Der Bogen AP_n, den wir stark gezeichnet haben, soll gleich h_n sein. X_nP_n ist dann gleich $\sin h_n$, OX_n gleich $\cos h_n$, ebenso AT_n gleich $\operatorname{tg} h_n$. Der Flächeninhalt des Kreissektors AOP_n verhält sich zu dem Inhalt π des Einheitskreises wie der Bogen h_n zu dem Kreisumfang 2π; er ist also gleich $\frac{1}{2}h_n$. Das Dreieck OX_nP_n hat den Inhalt $\frac{1}{2}\cos h_n \sin h_n$, das Dreieck OAT_n den Inhalt $\frac{1}{2}\operatorname{tg} h_n$. Da der Kreissektor offenbar größer als das erste und kleiner als das zweite Dreieck ist, so haben wir

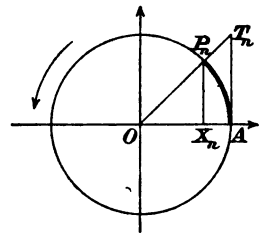


Fig. 7.

$$\frac{1}{2}\cos h_n \sin h_n < \frac{1}{2}h_n < \frac{1}{2}\frac{\sin h_n}{\cos h_n}.$$

Dividiert man durch $\frac{1}{2}\sin h_n$, so ergibt sich

$$\cos h_n < \frac{h_n}{\sin h_n} < \frac{1}{\cos h_n},$$

also

$$\frac{1}{\cos h_n} > \frac{\sin h_n}{h_n} > \cos h_n.$$

Nun ist aber

$$\lim \cos h_n = 1, \quad \lim \frac{1}{\cos h_n} = 1,$$

folglich auch*)

$$\lim \frac{\sin h_n}{h_n} = 1.$$

*) Wenn $\lim u_n = \lim w_n = c$ ist und v_n beständig zwischen u_n und w_n liegt, so ist auch $\lim v_n = c$. In der Tat liegen „fast alle"

Da $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$ ist, so können wir die Voraussetzung, daß alle h_n positiv sind, fallen lassen und haben somit folgendes Resultat:

$\frac{\sin h}{h}$ strebt dem Grenzwert 1 zu, wenn h irgendwie nach Null konvergiert (ohne selbst den Wert Null anzunehmen).

§ 17. Unendliche Reihen im allgemeinen.

Wenn eine beliebige Zahlenfolge $u_1, u_2, u_3, \ldots$ vorliegt, so kann man aus ihr eine neue Folge bilden, indem man zuerst u_1 hinschreibt, dann $u_1 + u_2$, dann $u_1 + u_2 + u_3$ usw. Setzt man

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n,$$

so lautet die neue Folge

$$s_1, s_2, s_3, \ldots$$

Es kann sein, daß diese Folge konvergent ist, daß also s_n einem Grenzwert s zustrebt. Wenn dies der Fall ist, so sagen wir, daß die unendliche Reihe

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

konvergent ist (konvergiert) und die Summe s hat, und wir schreiben:

$$s = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

Wenn die Folge $s_1, s_2, s_3, \ldots$ nicht konvergent ist, so sagen wir, daß die unendliche Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ divergent ist (divergiert).

$s_1, s_2, s_3, \ldots$ nennen wir die Partialsummen (s_n die n-te Partialsumme) der unendlichen Reihe.

Aus der Definition der Konvergenz ergeben sich unmittelbar folgende Sätze:

1. Wenn $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ konvergent ist, so ist auch $u_\nu + u_{\nu+1} + u_{\nu+2} + \cdots$ konvergent und umgekehrt.

2. Wenn $u_1 + u_2 + u_3 \ldots$ konvergent ist und die Summe s hat, so konvergiert auch die Reihe

$$(u_1 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}) + \cdots$$

---

u_n und „fast alle" w_n zwischen $c - \varepsilon$ und $c + \varepsilon$. Folglich gilt das auch von den v_n und zwar für jedes positive ε. Das bedeutet aber, daß $\lim v_n = c$ ist.

und hat die Summe s. Es folgt nämlich aus $\lim s_n = s$, daß auch die Folge

$$s_{n_1},\ s_{n_2},\ s_{n_3},\ \cdots$$

nach s konvergiert.

3. Wenn

$$s = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots,$$

so ist

$$as = au_1 + au_2 + au_3 + \cdots$$

4. Bei einer konvergenten Reihe muß $\lim u_n = 0$ sein; denn man hat $\lim s_n = s$, $\lim s_{n-1} = s$, folglich $\lim (s_n - s_{n-1}) = \lim u_n = 0$.

Die Bedingung $\lim u_n = 0$ ist übrigens für die Konvergenz der Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ zwar notwendig, aber keineswegs hinreichend. Das zeigt uns das Beispiel der sogenannten harmonischen Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

Hier ist $u_n = \frac{1}{n}$, also $\lim u_n = 0$. Trotzdem konvergiert die Reihe nicht.

In der Tat ist die Summe der $2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$ Glieder

$$\frac{1}{2^{n-1}},\quad \frac{1}{2^{n-1}+1},\quad \cdots,\quad \frac{1}{2^n - 1}$$

größer als $2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}$.

Summiert man die q ersten Gruppen dieser Art ($n = 1, 2, \ldots, q$), so erhält man eine Partialsumme der Reihe, die größer ist als $\frac{1}{2}q$, eine Zahl, welche wir beliebig groß machen können.

5. Es sei

$$s = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots,\quad t = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$$

und

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n,\quad t_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n.$$

Dann ist

$$s + t = u_1 + v_1 + u_2 + v_2 + u_3 + v_3 + \cdots$$

In der Tat lautet die $2n$-te Partialsumme $s_n + t_n$, die $(2n-1)$-te $s_n + t_n - v_n$. Beide konvergieren offenbar nach $s + t$.

Ebenso ist

$$s - t = u_1 - v_1 + u_2 - v_2 + u_3 - v_3 + \cdots$$

§ 18. Beispiele.

1. Die geometrische Reihe*)

$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots$$

ist für $q = 1$ nicht konvergent, weil $s_n = n$ über alle Grenzen wächst. Ist $q \gtrless 1$, so benutzen wir, daß

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}, \\ qs_n &= \quad q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n, \end{aligned}$$

folglich

$$s_n(1 - q) = 1 - q^n,$$

also

$$s_n = \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^n}{1 - q}$$

ist. Im Falle $|q| > 1$ wächst $|s_n|$ über alle Grenzen, s_n hat also keinen Grenzwert. Im Falle $|q| < 1$ dagegen ist $\lim q^n = 0$, mithin

$$\lim s_n = \frac{1}{1 - q}.$$

Wenn $q = -1$ ist, so sind $s_2, s_4, s_6, \ldots$ alle gleich Null, $s_1, s_3, s_5, \ldots$ alle gleich 1. Die Folge $s_1, s_2, s_3, \ldots$ hat also zwei Häufungsstellen.

*) Man bezeichnet so auch die allgemeinere Reihe $a + aq + aq^2 + \cdots$ Eine geometrische Reihe spielt bei dem berühmten Sophisma des Zeno von Elea eine Rolle: Achilles verfolgt eine Schildkröte und kann 12-mal so schnell laufen als sie. Die Schildkröte hat zu Anfang einen Vorsprung von 1 Stadion. Während Achilles diese Strecke durchläuft, legt die Schildkröte $\frac{1}{12}$ Stadion zurück, ihr Vorsprung beträgt dann also $\frac{1}{12}$ Stadion. Hat Achilles auch diese Strecke durchlaufen, so ist der Vorsprung der Schildkröte noch $\left(\frac{1}{12}\right)^2$ Stadion u. s. f. Achilles holt die Schildkröte also niemals ein, sagt Zeno. In Wirklichkeit holt er sie ein, nachdem er die Strecke $s = 1 + \frac{1}{12} + \left(\frac{1}{12}\right)^2 + \left(\frac{1}{12}\right)^3 + \cdots$ Stadien zurückgelegt hat, d. h. $1\frac{1}{11}$ Stadien.

Die geometrische Reihe $1 + q + q^2 + q^3 + \cdots$ konvergiert nur, wenn $|q| < 1$ ist, und man hat in diesem Falle

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots$$

2. Eine Reihe, deren Glieder abwechselnd positiv und negativ sind, heißt eine alternierende Reihe. Eine solche Reihe hat die Form

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots,$$

und die a sind alle positiv.

Es gibt gewisse alternierende Reihen, deren Konvergenz man sehr leicht beweisen kann. Das sind diejenigen, bei welchen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ eine nach Null konvergierende absteigende Folge ist, also

$$a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \geqq \cdots \quad \text{und} \quad \lim a_n = 0.$$

Wenn man die Partialsummen

$$s_1 = a_1,\ s_2 = a_1 - a_2,\ s_3 = a_1 - a_2 + a_3, \ldots$$

durch Punkte auf der Zahlenlinie darstellt, so bemerkt man, daß diese Punkte so liegen, wie es Fig. 8 andeutet. Danach bilden

Fig. 8.

$s_1, s_3, s_5, \ldots$ eine aufsteigende,

$s_2, s_4, s_6, \ldots$ eine absteigende

Folge und beide Folgen liegen in dem Intervall (s_2, s_1). Sie sind also beide konvergent, und da

$$s_{2n-1} - s_{2n} = a_{2n},$$

folglich

$$\lim s_{2n-1} - \lim s_{2n} = \lim a_{2n} = 0$$

ist, so haben sie beide denselben Grenzwert s. Die Reihe

$$a_1 - a_2 + a_3 - \cdots$$

ist daher konvergent und hat die Summe s. Alle s_n mit ungeradem Index sind größer als s, alle mit geradem Index kleiner als s. Nehmen wir also zwei aufeinanderfolgende Partialsummen, so liegt s zwischen ihnen.

§ 19. Reihen mit positiven Gliedern.

Wenn alle Glieder einer unendlichen Reihe positiv sind, so bilden die Partialsummen eine aufsteigende Folge. Sobald man sich also überzeugt hat, daß s_n beständig kleiner bleibt als eine feste Zahl g, ist die Konvergenz der Reihe gesichert; denn s_n hat alsdann einen Grenzwert s.

Liegen zwei Reihen mit positiven Gliedern vor

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots \quad \text{und} \quad v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$$

und sind die Glieder der ersten kleiner oder gleich den entsprechenden Gliedern der zweiten, also

$$u_1 \leqq v_1,\ u_2 \leqq v_2,\ u_3 \leqq v_3, \ldots,$$

so folgt aus der Konvergenz der zweiten Reihe die der ersten, und wenn die erste Reihe divergiert, so divergiert auch die zweite.

Diese einfache Bemerkung benutzen wir zum Beweise des folgenden Konvergenzkriteriums, welches von d'Alembert herrührt.

Eine unendliche Reihe mit positiven Gliedern

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

ist konvergent, wenn es eine Zahl q gibt, die kleiner als 1 ist und „fast alle" Glieder der Folge

$$\frac{u_2}{u_1},\ \frac{u_3}{u_2},\ \frac{u_4}{u_3}, \ldots$$

übertrifft.

Wenn die Glieder dieser Folge „fast alle" größer oder gleich 1 sind, so konvergiert die Reihe nicht, weil nicht einmal $\lim u_n = 0$ ist.

Im ersten Falle bestehen mit einer endlichen Anzahl von Ausnahmen die Ungleichungen

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < q, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Ist $\nu - 1$ der größte unter den Ausnahmeindizes, so haben wir

$$u_{\nu+1} < q u_\nu,\ u_{\nu+2} < q u_{\nu+1}, \cdots,$$

folglich

$$u_{\nu+1} < q u_\nu,\ u_{\nu+2} < q^2 u_\nu, \ldots$$

Aus der Konvergenz der Reihe $u_\nu + q u_\nu + q^2 u_\nu + \cdots$ folgt

auf Grund der obigen Bemerkung die der Reihe

$$u_\nu + u_{\nu+1} + u_{\nu+2} + \cdots,$$

also auch die der Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$

Im zweiten Falle bestehen mit einer endlichen Anzahl von Ausnahmen die Ungleichungen

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqq 1. \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Ist wieder $\nu - 1$ der größte der Ausnahmeindizes, so hat man

$$u_{\nu+1} \geqq u_\nu, \; u_{\nu+2} \geqq u_{\nu+1}, \cdots,$$

folglich

$$u_{\nu+1} \geqq u_\nu, \; u_{\nu+2} \geqq u_\nu, \cdots$$

Das widerspricht der für die Konvergenz notwendigen Bedingung $\lim u_n = 0$.

Wenn $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ einen Grenzwert l hat, so ist die Reihe

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

im Falle $l < 1$ konvergent, im Falle $l > 1$ aber nicht; sie konvergiert auch nicht, wenn $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$ ist. Wählt man nämlich im ersten Falle ε so klein, daß $q = l + \varepsilon$ auch noch kleiner als 1 ist, im zweiten Falle ε so klein, daß $l - \varepsilon$ auch noch größer als 1 ist, so sieht man (da „fast alle" $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ zwischen $l - \varepsilon$ und $l + \varepsilon$ liegen), daß im ersten Falle die Ungleichungen $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ im zweiten (wie im dritten) Falle die Ungleichungen $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ mit einer endlichen Anzahl von Ausnahmen gelten.

Umordnung der Glieder.

$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ sei eine Reihe mit positiven Gliedern, ebenso $v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$ Beide mögen dieselben Glieder enthalten, nur in verschiedener Anordnung. Die zweite Reihe soll also aus der ersten durch eine gewisse Umordnung der Glieder entstanden sein. Die erste Reihe sei konvergent und habe die Summe s. Wir

wollen beweisen, daß auch die zweite Reihe konvergiert und die Summe s hat. Zu jeder Partialsumme σ_n von $v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$ gibt es eine größere $s_{n'}$ in $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ Man braucht nur n' so groß zu wählen, daß in $s_{n'}$ die Glieder $v_1, v_2, \cdots, v_n$ alle vorkommen. Da die sonst in $s_{n'}$ noch auftretenden Glieder (wie überhaupt alle Glieder) positiv sind, so hat man $s_{n'} \geqq \sigma_n$, folglich auch $s > \sigma_n$. Hieraus sieht man, daß die Reihe $v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$ konvergiert, und wenn wir mit σ ihre Summe bezeichnen, so folgt aus $s > \sigma_n$ noch $s \geqq \sigma$. Vertauscht man jetzt die Rollen der beiden Reihen, so findet man $\sigma \geqq s$. Es ist daher $s = \sigma$.

Wir haben also den folgenden Satz gewonnen:

Wenn man in einer konvergenten Reihe mit positiven Gliedern die Glieder beliebig umordnet, so bleibt sie konvergent und die Summe der Reihe bleibt dieselbe.

§ 20. Absolut konvergente Reihen.

Man kann sich leicht überzeugen, daß die Konvergenz von $|u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots$ die Konvergenz von $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ nach sich zieht. (Die u sind jetzt nicht mehr alle positiv.)

In der Tat ist

$$0 \leqq \frac{|u_n| + u_n}{2} \leqq |u_n|, \qquad 0 \leqq \frac{|u_n| - u_n}{2} \leqq |u_n|.$$

Also sind die Reihen

$$\frac{|u_1| + u_1}{2} + \frac{|u_2| + u_2}{2} + \frac{|u_3| + u_3}{2} + \cdots$$

und

$$\frac{|u_1| - u_1}{2} + \frac{|u_2| - u_2}{2} + \frac{|u_3| - u_3}{2} + \cdots$$

konvergent, folglich auch die durch Subtraktion entstehende Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$

Man nennt eine Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ absolut konvergent, wenn die Reihe $|u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots$ konvergiert.

Umordnung der Glieder.

Eine absolut konvergente Reihe kann man, wie wir eben bemerkten, immer als Differenz zweier konvergenter Reihen mit posi-

tiven Gliedern darstellen. Man setzt*)

$$v_n = \frac{|u_n| + u_n}{2}, \qquad w_n = \frac{|u_n| - u_n}{2}$$

Dann sind, wie wir wissen, die Reihen $v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$, $w_1 + w_2 + w_3 + \cdots$ konvergent und haben kein negatives Glied. Ferner ist

$$u_n = v_n - w_n,$$

also $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ die Differenz der Reihen $v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$ und $w_1 + w_2 + w_3 + \cdots$ Eine Umordnung der Glieder von $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ läßt sich jetzt dadurch erreichen, daß man die entsprechende Umordnung in den beiden Reihen $v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$ und $w_1 + w_2 + w_3 + \cdots$ vornimmt. Dabei behalten sie aber ihre Konvergenz und ihre Summen. Dasselbe gilt mithin von der Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$, und wir haben damit den folgenden Satz gewonnen:

Wenn man in einer absolut konvergenten Reihe die Glieder beliebig umordnet, so bleibt sie konvergent und die Summe der Reihe bleibt dieselbe.

§ 21. Produkt aus zwei absolut konvergenten Reihen.

Wir betrachten zunächst zwei konvergente Reihen mit positiven Gliedern

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \quad \text{und} \quad b_1 + b_2 + b_3 + \cdots$$

Die n-te Partialsumme der ersten heiße A_n, die der zweiten B_n; die Summe der ersten Reihe sei A, die der zweiten B.

Betrachten wir die Reihe

$$a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1 + \cdots,$$

so kommen darin alle Produkte vor, die sich aus einem Glied der ersten und einem Glied der zweiten Reihe bilden lassen. Diese Produkte sind in der Weise geordnet, daß die Summe der Indizes der Faktoren zuerst 2, dann 3, dann 4, ... ist. Die Produkte mit der

*) Will man haben, daß keine der Größen v_n und w_n verschwindet, so setze man etwa

$$v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{|u_n| + u_n}{2}, \qquad w_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{|u_n| - u_n}{2}.$$

Indizessumme $n+1$, also $a_1 b_n, a_2 b_{n-1}, \ldots, a_{n-1} b_2, a_n b_1$, sind so geschrieben, daß der Index von a wächst.

Nehmen wir irgend eine Partialsumme S_n der Reihe $a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + \cdots$, so läßt sich der Index μ so wählen, daß $S_n < A_\mu B_\mu$ ist.*) Daraus folgt

$$S_n < AB.$$

Die Partialsummen der Reihe $a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + \cdots$ sind also alle kleiner als AB, mithin ist die Reihe konvergent. Ihre Summe wollen wir mit S bezeichnen. Nehmen wir jetzt das Produkt $A_n B_n$, so läßt sich der Index ν so wählen, daß $A_n B_n < S_\nu$ ist.**) Daraus folgt

$$A_n B_n < S.$$

Die Ungleichung $S_n < AB$ zeigt, daß S (der Grenzwert von S_n) nicht größer als AB sein kann, die Ungleichung $A_n B_n < S$, daß AB (der Grenzwert von $A_n B_n$) nicht größer als S sein kann.

Es ist folglich $S = AB$.

Da die Reihe $a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + \cdots$ aus lauter positiven Gliedern besteht, so dürfen wir diese Glieder beliebig umordnen, ohne daß ihre Summe sich ändert.

Jetzt seien

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots \quad \text{und} \quad v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$$

zwei absolut konvergente Reihen mit den Summen s bzw. t. Wir wissen, daß sich eine absolut konvergente Reihe immer als Differenz von zwei konvergenten Reihen mit positiven Gliedern darstellen läßt.

$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ sei die Differenz der Reihen

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \quad \text{und} \quad b_1 + b_2 + b_3 + \cdots$$

mit den Summen A und B, also $u_n = a_n - b_n$, $s = A - B$. Ebenso sei $v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$ die Differenz der Reihen

$$c_1 + c_2 + c_3 + \cdots \quad \text{und} \quad d_1 + d_2 + d_3 + \cdots$$

mit den Summen C und D, also $v_n = c_n - d_n$, $t = C - D$.

---

*) Wenn μ genügend groß ist, so kommen in dem ausgerechneten Produkt $A_\mu B_\mu$ sicher alle Glieder von S_n vor.

**) Wenn ν genügend groß ist, so kommen in S_ν alle Glieder des ausgerechneten Produktes $A_n B_n$ vor.

Nach dem Obigen hat man:

$$AC = a_1c_1 + a_1c_2 + a_2c_1 + \cdots,$$
$$AD = a_1d_1 + a_1d_2 + a_2d_1 + \cdots,$$
$$BC = b_1c_1 + b_1c_2 + b_2c_1 + \cdots,$$
$$BD = b_1d_1 + b_1d_2 + b_2d_1 + \cdots,$$

folglich

$$st = AC + BD - BC - AD = u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 + \cdots,$$

weil

$$a_1c_1 + b_1d_1 - b_1c_1 - a_1d_1 = (a_1 - b_1)(c_1 - d_1) = u_1v_1$$

ist usw.

Die Reihe rechts ist nicht nur konvergent, sondern auch absolut konvergent. Das allgemeine Glied in der konvergenten Reihe, die man für $AC + AD + BC + BD$ erhält, d. h.

$$(a_ic_k + a_id_k + b_ic_k + b_id_k),$$

ist nämlich größer als der Betrag von u_iv_k, weil $|u_i| < a_i + b_i$ und $|v_k| < c_k + d_k$.

Man darf daher in der Reihe $u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 + \cdots$ die Glieder beliebig umordnen, ohne daß sie aufhört zu konvergieren und die Summe st zu haben. Wir haben also folgenden Satz:

$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$ und $v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$ seien absolut konvergent. s sei die Summe der ersten, t die der zweiten Reihe. Bildet man eine Reihe, deren Glieder die sämtlichen Produkte u_iv_k*) sind ($i = 1, 2, 3, \ldots$; $k = 1, 2, 3, \ldots$), so ist diese Reihe absolut konvergent und hat die Summe st.

Beispiel. Wir wissen, daß die Reihe

$$1 + q + q^2 + \cdots$$

unter der Bedingung $|q| < 1$ absolut konvergent ist und die Summe $\frac{1}{1-q}$ hat, so daß

$$\left(\frac{1}{1-q}\right)^2 = (1 + q + q^2 + \cdots)(1 + q + q^2 + \cdots).$$

*) (jedes nur einmal vorkommend).

Die Glieder $u_i v_k$ lauten hier

$$\begin{aligned} &1', q, q^2, q^3, \cdots, \\ &q, q^2, q^3, \cdots, \\ &q^2, q^3, \cdots, \\ &q^3, \cdots, \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

Es ist also:

$$\left(\frac{1}{1-q}\right)^2 = 1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \cdots$$

Multiplizieren wir diese (absolut konvergente) Reihe noch einmal mit $1 + q + q^2 + \cdots$, so ergibt sich eine Reihe für $\left(\frac{1}{1-q}\right)^3$ usf.

§ 22. Potenzreihen.

Die geometrische Reihe gehört zu den sogenannten Potenzreihen. Eine Potenzreihe ist eine Reihe, deren Glieder die sukzessiven Potenzen einer Zahl x sind, jede mit einem Faktor versehen. Eine solche Reihe hat also folgende Gestalt:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

Die $a_0, a_1, a_2, \ldots$ heißen die Koeffizienten der Potenzreihe. Bei der geometrischen Reihe haben sie alle denselben Wert.

Wenn eine Potenzreihe vorliegt (d. h. ihre Koeffizienten bekannt sind), so kann man fragen: Für welche Werte von x ist die Reihe konvergent? Diese Werte bilden den Konvergenzbereich der Reihe.

Es gibt Potenzreihen, die für alle Werte von x konvergieren. Das sind die sogenannten beständig konvergenten Potenzreihen. Eine solche Reihe ist die folgende*):

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Bezeichnen wir die Glieder mit $u_1, u_2, u_3, \ldots$, so wird

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|x|}{n}.$$

*) $n!$ ist das Produkt der n Zahlen $1, 2, \ldots, n$.

Es ist folglich $\lim \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = 0$, und wir können auf Grund des d'Alembertschen Kriteriums (vgl. S. 34) schließen, daß $|u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots$ konvergiert. Die betrachtete Potenzreihe ist also für jeden Wert von x absolut konvergent. Ihre Summe ist, wie wir später sehen werden, gleich e^x.

Es gibt auch Potenzreihen, die nur für $x = 0$ konvergieren.*) Eine solche Reihe ist die folgende:

$$1 + 1!\,x + 2!\,x^2 + 3!\,x^3 + \cdots$$

Hier ist nämlich $\lim \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \infty$, sobald $x \gtrless 0$. Es ist also nicht einmal $\lim u_n = 0$. (Vgl. S. 34.)

Wenn eine Potenzreihe $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ für einen von Null verschiedenen Wert x_0 konvergiert, so ist sicher $\lim a_n x_0^n = 0$. Eine konvergente Zahlenfolge läßt sich aber, wie wir wissen (vgl. S. 15), in ein endliches Intervall einschließen. Es gibt also eine Zahl g, so daß alle Glieder $a_n x_0^n$ ihrem Betrage nach kleiner als g sind. Nun schreiben wir

$$a_n x^n = a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n.$$

Dann ist

$$\left| a_n x^n \right| < g \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$$

Im Falle $|x| < |x_0|$ konvergiert also die Reihe

$$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \cdots,$$

weil ihre Glieder kleiner sind als die entsprechenden Glieder der konvergenten geometrischen Reihe

$$g + g \left| \frac{x}{x_0} \right| + g \left| \frac{x}{x_0} \right|^2 + \cdots$$

Es gilt demnach folgender Satz:

Wenn eine Potenzreihe für $x = x_0$ $(\gtrless 0)$ konvergiert, so ist sie im Innern des Intervalls $(-x_0, x_0)$ absolut konvergent.

Hieraus ergibt sich als Folgerung:

Wenn eine Potenzreihe für $x = X_0$ divergiert, so ist sie auch außerhalb des Intervalls $(-X_0, X_0)$ nirgends konvergent.

*) Für $x = 0$ konvergiert jede Potenzreihe.

Jetzt wollen wir eine Potenzreihe betrachten, die nicht für $x = 0$ allein konvergiert, die aber auch nicht beständig konvergent ist. Es gibt also eine von Null verschiedene Zahl x_0, für welche sie konvergiert und eine Zahl X_0 für welche sie nicht konvergiert. r_0 und R_0 seien zwei positive Zahlen, die so gewählt sind, daß $r_0 < |x_0|$ und $R_0 > |X_0|$ ist. Nach dem obigen Satz konvergiert dann die Potenzreihe für $x = r_0$, während sie es für $x = R_0$ nicht tut, und es ist $r_0 < R_0$. Wir teilen das Intervall (r_0, R_0) in 2^n gleiche Teile. Unter den Teilintervallen gibt es dann eins und nur eins, (r_n, R_n), welches sich ebenso wie (r_0, R_0) verhält, so daß also die Potenzreihe für $x = r_n$ konvergiert, für $x = R_n$ dagegen nicht. Die Folge von Intervallen

$$(r_0, R_0), (r_1, R_1), (r_2, R_2), \ldots$$

ist so beschaffen, daß jedes das Folgende enthält (als eine seiner beiden Hälften). $r_0, r_1, r_2, \ldots$ ist eine aufsteigende, $R_0, R_1, R_2, \ldots$ eine absteigende Folge in dem Intervall (r_0, R_0). Beide Folgen sind daher konvergent, und sie haben beide denselben Grenzwert ϱ, weil

$$\lim (R_n - r_n) = \lim \frac{R_0 - r_0}{2^n} = 0$$

ist. Die Zahl ϱ hat nun folgende Eigenschaft:

Im ganzen Innern des Intervalls $(-\varrho, \varrho)$ konvergiert die Potenzreihe absolut. Ist nämlich x ein Wert im Innern von $(-\varrho, \varrho)$, so können wir, da $\lim r_n = \varrho$ ist, n so groß wählen, daß x auch im Innern des Intervalls $(-r_n, r_n)$ liegt. Da die Reihe für r_n konvergiert, so ist sie im Innern des Intervalls $(-r_n, r_n)$ absolut konvergent, also auch für jenen Wert x.

Außerhalb des Intervalls $(-\varrho, \varrho)$ konvergiert die Potenzreihe nirgends. Ist nämlich x ein Wert außerhalb von $(-\varrho, \varrho)$ so können wir, da $\lim R_n = \varrho$ ist, n so groß wählen, daß x auch außerhalb von $(-R_n, R_n)$ liegt. Da die Reihe für R_n divergiert, so kann sie außerhalb von $(-R_n, R_n)$ nirgends konvergent sein Sie divergiert also auch für jenen Wert x.

Das Intervall $(-\varrho, \varrho)$ nennt mann das Konvergenzintervall der Potenzreihe. ϱ heißt der Konvergenzradius.

Wenn eine Potenzreihe beständig konvergent ist, so sagt man, sie habe den Konvergenzradius ∞. Konvergiert sie nur für $x = 0$, so sagt man, ihr Konvergenzradius sei 0.

Zweites Kapitel.

Differentialrechnung.

§ 23. Der Differenzenquotient.

$y = f(x)$ sei eine Funktion, die für alle Werte eines gewissen Intervalls (a, b) definiert ist. Sie wird geometrisch durch einen Kurvenbogen dargestellt (Fig. 9)*).

Wir wollen einen Wert x in (a, b) ins Auge fassen; ihm entspricht der Funktionswert $f(x)$. Erteilen wir dem x einen positiven oder negativen**) Zuwachs $\Delta x = h$, ersetzen wir mit anderen Worten x durch $x + h$, so erhalten wir statt $f(x)$ den Funktionswert $f(x + h)$; die Funktion y bekommt also den Zuwachs $\Delta y = f(x + h) - f(x)$. Dividieren wir ihn durch den Zuwachs $\Delta x = h$ der unabhängigen Veränderlichen, dem er entspricht, so entsteht

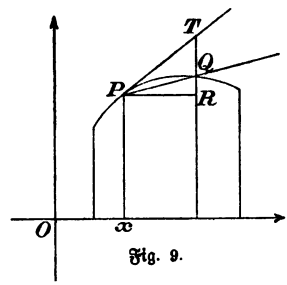


Fig. 9.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Diesen Ausdruck nennt man einen Differenzenquotienten.

Er hat eine einfache geometrische Bedeutung. P und Q seien die den Werten x und $x + h$ entsprechenden Kurvenpunkte. Die Gerade PQ bilde mit der positiven Richtung der x-Achse den Winkel φ***). Dann ist

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Der Differenzenquotient ist also gleich der Richtungskonstanten der Sekante PQ.

---

*) Wir benutzen ein rechtwinkliges Achsenpaar.

**) $x + h$ darf nicht außerhalb (a, b) liegen. Wir müssen daher, wenn $x = a$ ist, h auf positive, wenn $x = b$ ist, auf negative Werte beschränken.

***) Die Bedeutung dieser Aussage ist folgende: Die x-Achse muß sich, um mit PQ parallel zu werden, so um O drehen, daß der Punkt A (vgl. Fig. 4) den Bogen φ zurücklegt (vgl. S. 8). φ ist nur bis auf Vielfache von π bestimmt, $\operatorname{tg} \varphi$ hat aber einen ganz bestimmten Wert, weil $\operatorname{tg}(\varphi + \pi) = \operatorname{tg} \varphi$ ist. $\operatorname{tg} \varphi$ nennt man die Richtungskonstante der Geraden PQ.

Man kann den Differenzenquotienten noch auf eine andere Weise deuten. Wir wollen x als die von einem bestimmten Anfang gerechnete Zeit betrachten und uns dann einen Punkt denken, der sich so auf der Zahlenlinie bewegt, daß er zur Zeit x immer mit dem Bildpunkt der Zahl $f(x)$, oder, kurz gesagt, dem Punkt $f(x)$ zusammenfällt. Während des Zeitintervalls $(x, x+h)$ ist er von $f(x)$ nach $f(x+h)$ gelangt. Hätte er sich während dieser Zeit **gleichförmig** bewegt, so wäre dazu die Geschwindigkeit (Weg*) durch Zeit)

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

nötig gewesen. Diese Geschwindigkeit nennt man die **mittlere Geschwindigkeit** des Punktes während des Zeitintervalls $(x, x+h)$. Sie ist, wie man sieht, gleich dem Differenzenquotienten.

§ 24. Die Ableitung und das Differential.

Wir wollen h nach Null konvergieren (d. h. irgend eine**) Folge $h_1, h_2, h_3, \ldots$ mit der Eigenschaft $\lim h_n = 0$ durchlaufen) lassen. Es kann sein, daß dabei der Differenzenquotient immer einem und demselben Grenzwert A zustrebt, daß man also immer

$$\lim_{n=\infty} \frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n} = A$$

hat, wenn $\lim h_n = 0$ ist. In diesem Falle sagt man, daß $f(x)$ an der Stelle x eine **Ableitung** besitzt und daß diese Ableitung gleich A ist.

Die Ableitung ist hiernach, falls sie existiert, gleich dem Grenzwert des Differenzenquotienten $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ für nach Null konvergierendes h.

Man bezeichnet die Ableitung, um ihre Beziehung zu $f(x)$ und x hervortreten zu lassen, mit $f'(x)$. Es ist also

$$f'(x) = \lim_{h=0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$***)

*) Der Weg wird wie eine Strecke gemessen (vgl. S. 8), ebenso die Zeit.

**) Wir nehmen an, daß kein h_n gleich Null ist.

***) $h=0$ unter dem Zeichen lim deutet an, daß h nach Null konvergieren soll. Falls $x=a$, muß h positiv, falls $x=b$, muß h negativ sein.

Eine notwendige Bedingung für die Existenz der Ableitung an der Stelle x ist die **Stetigkeit** von $f(x)$ an dieser Stelle. In der Tat hat man, wenn $f'(x)$ existiert,

$$f(x+h)-f(x)=h\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

also

$$\lim\left\{f(x+h)-f(x)\right\}=\lim h\cdot\lim\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=0\cdot f'(x)=0.$$

Diese Bedingung ist aber **keineswegs hinreichend**. Betrachtet man z. B. die Funktion

$$f(x)=x\sin\frac{1}{x},\ ^*)$$

so ist $\lim f(h)=f(0)=0$; sie ist also an der Stelle $x=0$ stetig. Dagegen hat

$$\frac{f(h)-f(0)}{h}=\sin\frac{1}{h}$$

keinen Grenzwert. Läßt man nämlich h die Folge $\frac{2}{\pi}$, $\frac{1}{2}\frac{2}{\pi}$, $\frac{1}{3}\frac{2}{\pi}$, $\cdots$ durchlaufen, so durchläuft $\sin\frac{1}{h}$ die Folge $1, 0, -1, 0, \ldots$, die nicht konvergent ist.

Ebenso wie der Differenzenquotient hat auch die Ableitung eine einfache geometrische Bedeutung. Läßt man h nach Null konvergieren, so konvergiert der Punkt Q nach der Lage P (d. h. jede der Koordinaten von Q nach der entsprechenden von P). Die Gerade PQ dreht sich um den festen Punkt P so, daß ihre Richtungskonstante dem Grenzwert $f'(x)$ zustrebt. Man sagt, daß ihre **Grenzlage** diejenige Gerade durch P ist, deren Richtungskonstante den Wert $f'(x)$ hat. Diese Gerade nennt man die **Tangente** der Kurve im Punkte P. Wie der Differenzenquotient gleich der Richtungskonstanten einer Sekante war, so ist **die Ableitung gleich der Richtungskonstanten der Tangente**.

Wenn wir x als die Zeit betrachteten und $f(x)$ als die Abszisse eines auf der Zahlenlinie sich bewegenden Punktes, so war der Differenzenquotient gleich der mittleren Geschwindigkeit während des Zeitintervalls $(x, x+h)$.

---

*) Für $x=0$ ist diese Formel sinnlos. Wir setzen aber fest, daß $f(0)=0$ sein soll.

Wenn diese bei nach Null konvergierendem h einem Grenzwert zustrebt, so pflegt man ihn als die Geschwindigkeit des Punktes zur Zeit x zu bezeichnen. Die Ableitung $f'(x)$ erscheint hier also als eine Geschwindigkeit.

Das Differential von $f(x)$ ist das Produkt aus der Ableitung $f'(x)$ und der Größe h (dem Zuwachs von x). Man bezeichnet es mit $df(x)$. Es ist also

$$df(x) = f'(x)h.$$

Wenn man die Bildkurve von $f(x)$ durch ihre Tangente im Punkte P ersetzt, so ist der Zuwachs, den die Funktion beim Übergange von x zu $x + h$ erfährt, nicht mehr $f(x + h) - f(x)$, sondern $f'(x)h$ oder $df(x)$. In Fig. 9 ist $df(x) = RT$, $f(x + h) - f(x) = RQ$.

Benutzen wir die andere Deutung (x die Zeit und $f(x)$ die Abszisse eines auf der Zahlenlinie sich bewegenden Punktes), so ist folgendes zu sagen: Wenn der Punkt die Geschwindigkeit $f'(x)$, die er zur Zeit x hat, immer hätte, so würde er in dem Zeitintervall $(x, x + h)$ die Strecke $f'(x)h$ beschreiben, nicht mehr die Strecke

$$f(x + h) - f(x).$$

Dem Begriff des Differentials, der von Leibniz herrührt, liegt, wie wir sehen, der Gedanke zu Grunde, eine Kurve in der Umgebung eines Punktes durch eine Gerade oder eine beliebige Bewegung in der Umgebung eines Zeitpunktes durch eine gleichförmige zu ersetzen.

Die Ableitung der Funktion x ist gleich 1, weil schon der Differenzenquotient $\frac{(x + h) - x}{h} = 1$ ist. Infolgedessen gilt für das Differential von x die Formel

$$dx = h.$$

Das Differential von x ist also h selbst. Wir können daher in der Formel $df(x) = f'(x)h$ für h das Differential dx einsetzen und erhalten dann

$$df(x) = f'(x)dx.$$

Hieraus ergibt sich

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}.$$

Die Ableitung ist also ein Quotient zweier (zu demselben h

gehöriger) Differentiale, ein Differentialquotient. Man sagt deshalb statt „Ableitung von $f(x)$" auch „Differentialquotient von $f(x)$".

Die Berechnung des Differentials oder auch des Differentialquotienten einer Funktion nennt man Differentiation (Differenzieren).

§ 25. Differentiation einer Summe, einer Differenz, eines Produktes und eines Quotienten von zwei Funktionen.

Wir nehmen an, daß die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ an der Stelle x Ableitungen $f'(x)$, $g'(x)$ besitzen*).

1. Wenn $F(x) = f(x) + g(x)$ ist, so hat man

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Die rechte Seite hat bei nach Null konvergierendem h den Grenzwert $f'(x) + g'(x)$, folglich existiert $F'(x)$, und es ist

$$F'(x) = f'(x) + g'(x)$$

oder kurz

$$(f+g)' = f' + g'.$$

Die Ableitung einer Summe ist gleich der Summe der Ableitungen.

Der Satz gilt für eine beliebige endliche Anzahl von Summanden.

2. Genau ebenso beweist man, daß

$$(f-g)' = f' - g'$$

ist.

Die Ableitung einer Differenz ist gleich der Differenz der Ableitungen.

3. Jetzt sei

$$F(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Dann wird

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h}$$

$$= \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \cdot f(x+h) + \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x).$$

*) x ist ein Wert in einem Intervall (a, b), in welchem $f(x)$ und $g(x)$ definiert sind.

Die rechte Seite hat*) bei nach Null konvergierendem h den Grenzwert $f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$. Also existiert $F'(x)$, und man hat

$$F'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

oder kurz

$$(fg)' = fg' + gf'.$$

Wenn $g(x)$ eine Konstante c ist, so wird $g'(x) = 0$ (weil schon der Differenzenquotient verschwindet). Dann finden wir

$$(cf)' = cf',$$

eine Formel, die auch direkt leicht beweisbar ist.

Für ein Produkt von 3 Funktionen hat man zunächst

$$(fgh)' = f \cdot (gh)' + gh \cdot f',$$

also

$$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'.$$

Um ein Produkt von m Faktoren zu differenzieren, multipliziert man die Ableitung jedes Faktors mit allen andern Faktoren und addiert diese m Produkte.

4. Wenn $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ und $g(x)$ an der Stelle x **ungleich Null ist****), so wird

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right)$$

$$= \frac{f(x+h)g(x) - g(x+h)f(x)}{hg(x)g(x+h)}$$

$$= \frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x) - \frac{g(x+h)-g(x)}{h}f(x)}{g(x)g(x+h)}.$$

Die rechte Seite hat bei nach Null konvergierendem h den Grenzwert $\frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g(x)g(x)}$.

*) Man bedenke, daß $\lim f(x+h) = f(x)$ ist, weil $f(x)$ wegen der Existenz von $f'(x)$ an der Stelle x stetig ist.

**) Es läßt sich um x ein Intervall $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ konstruieren, in welchem $g(x)$ nirgends verschwindet. Wäre das nicht möglich, so gäbe es in jedem Intervall $\left(x - \frac{1}{n}\; x + \frac{1}{n}\right)$ eine Stelle x_n, so daß $g(x_n) = 0$ ist. Offenbar wäre dann $\lim x_n = x$, also wegen der Stetigkeit $\lim g(x_n) = g(x)$, d. h. $0 = g(x)$, was nicht zutrifft. Wir beschränken h auf das Intervall $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

Also existiert $F'(x)$, und man hat

$$F'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

oder kurz

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}.$$

Vorausgesetzt ist hierbei $g(x) \gtrless 0$.

Multipliziert man die obigen Formeln für

$$(f+g)', \quad (f-g)', \quad (fg)' \quad \text{und} \quad \left(\frac{f}{g}\right)'$$

mit dx, so nehmen sie folgende Gestalt an

1. $d(f+g) = df + dg,$
2. $d(f-g) = df - dg,$
3. $d(fg) = fdg + gdf, \; d(cf) = cdf,$
4. $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2}.$

§ 26. Differentiation der rationalen Funktionen.

Wir haben schon oben bemerkt, wie ein Produkt von m Faktoren differenziert wird. Man multipliziert die Ableitung jedes Faktors mit allen andern Faktoren und addiert diese m Produkte.

Sind alle m Faktoren gleich $f(x)$, so findet man die Formel

$$(f^m)' = mf^{m-1}f'$$

oder (mit dx multipliziert)

$$d(f^m) = mf^{m-1}df.$$

Im Falle $f = x$ lautet diese Formel

$$d(x^m) = mx^{m-1}dx. \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

Wir sind jetzt imstande eine ganze rationale Funktion

$$G(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m$$

zu differenzieren. Dazu brauchen wir uns nur zu erinnern, daß das Differential einer Summe mit irgend einer endlichen Anzahl von Summanden gleich der Summe der Differentiale dieser Summanden ist, ferner, daß $d(cf) = cdf$, wenn c eine Konstante bedeutet, und zugleich, daß das Differential einer Konstanten Null ist

Dann finden wir

$$dG(x) = (ma_0x^{m-1} + (m-1)a_1x^{m-2} + \cdots + a_{m-1})\,dx,$$

oder, wenn wir die Ableitung haben wollen,

$$G'(x) = ma_0x^{m-1} + (m-1)a_1x^{m-2} + \cdots + a_{m-1}.$$

Betrachten wir jetzt die rationale Funktion $G(x) : H(x)$, wobei

$$H(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}x + b_n$$

sein möge. Nach der Regel 4 des vorigen Paragraphen ist dann, wenn $H(x) \gtrless 0$,

$$\left(\frac{G}{H}\right)' = \frac{HG' - GH'}{H^2}$$

oder

$$d\left(\frac{G}{H}\right) = \frac{HdG - GdH}{H^2}.$$

dG und dH wissen wir aber zu berechnen. Wir können somit jede rationale Funktion differenzieren.

Beispiele. 1. Die Ableitung von $x^{-m} = \frac{1}{x^m}$ (m eine positive ganze Zahl) lautet $-mx^{-(m+1)}$, wenn $x \gtrless 0$ ist.

2. Die Ableitung von $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ wird:

$$y' = \frac{(cx+d)(ax+b)' - (ax+b)(cx+d)'}{(cx+d)^2}$$

oder

$$y' = \frac{(cx+d)a - (ax+b)c}{(cx+d)^2}$$

oder endlich

$$y' = \frac{ad - bc}{(cx+d)^2}.$$

Vorausgesetzt ist dabei $cx + d \gtrless 0$.

§ 27. Differentiation von a^x*).

Wenn $y = a^x$ ist, so hat man

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x\frac{a^h - 1}{h}.$$

*) a ist eine positive Zahl

Nun hat, wie wir wissen $\frac{a^h - 1}{h}$ den Grenzwert $\log a$ (natürlicher Logarithmus von a), also ist

$$(a^x)' = a^x \log a.$$

Insbesondere ist

$$(e^x)' = e^x.$$

Die Exponentialfunktion e^x hat also die Eigenschaft gleich ihrer eigenen Ableitung zu sein.

§ 28. Differentiation von $\log x$.

Wenn $y = \log x$*), so wird

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} \cdot \frac{1}{x}.$$

Wir setzen $\frac{h}{x} = \bar{h}$. Dann ist

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \log\left\{(1+\bar{h})^{\frac{1}{\bar{h}}}\right\}$$

Da $\bar{h}$ gleichzeitig mit h nach 0 konvergiert, so hat man (vgl. S. 26)

$$\lim\left\{(1+\bar{h})^{\frac{1}{\bar{h}}}\right\} = e.$$

Also ist (wegen der Stetigkeit von $\log x$, die wir auf S. 28 bewiesen haben) der Grenzwert der rechten Seite $\frac{1}{x}$. Wir haben demnach

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

${}^a\log x$ unterscheidet sich von $\log x$ nur um einen konstanten Faktor. Da nämlich

$$a^{{}^a\log x} = x,$$

so ist

$${}^a\log x \cdot \log a = \log x,$$

*) x ist positiv und h seinem Betrage nach kleiner als x. Der Logarithmus ist der natürliche (Basis gleich e).

also

$$^a\log x = \frac{1}{\log a} \cdot \log x .$$

Es wird daher

$$(^a\log x)' = \frac{1}{x \log a} .$$

Die Zahl $\frac{1}{\log a}$ heißt der Modul des Logarithmensystems mit der Basis a. Mit diesem Modul muß man die natürlichen Logarithmen multiplizieren, um die zur Basis a gehörigen zu erhalten.

§ 29. Differentiation der trigonometrischen Funktionen.

Man hat

$$\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h ,$$

also

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x \frac{\sin h}{h} + \sin x \frac{\cos h - 1}{h} .$$

Nun ist

$$(\cos h - 1)(\cos h + 1) = \cos^2 h - 1 = -\sin^2 h ,$$

mithin:

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x \frac{\sin h}{h} - \sin x \frac{\sin h}{h} \cdot \frac{\sin h}{1+\cos h} .$$

Da

$$\lim \frac{\sin h}{h} = 1 , \quad \lim \frac{\sin h}{1+\cos h} = 0$$

ist, so folgt

$$(\sin x)' = \cos x .$$

Bei $\cos x$ kommt man in ähnlicher Weise zum Ziele. Es ist

$$\cos(x+h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h ,$$

also

$$\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = -\sin x \frac{\sin h}{h} + \cos x \frac{\cos h - 1}{h}$$

oder

$$\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = -\sin x \frac{\sin h}{h} - \cos x \frac{\sin h}{h} \frac{\sin h}{1+\cos h} ,$$

folglich

$$(\cos x)' = -\sin x .$$

Die gefundenen Formeln lassen sich auch so schreiben:

$$(\sin x)' = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$(\cos x)' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Um $\operatorname{tg} x$ zu differenzieren, kann man davon ausgehen, daß

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

ist*). Auf diese Weise findet man

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{\cos x\,(\sin x)' - \sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x.$$

Es ist also

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x.$$

Ähnlich geht es bei $\cot x$. Da

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

ist**), so hat man

$$(\cot x)' = \frac{\sin x\,(\cos x)' - \cos x\,(\sin x)'}{\sin^2 x}$$

$$= -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x).$$

Es ist also

$$(\cos x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)..$$

Der Leser berechne die Ableitung von $\frac{1}{\cos x}$ und von $\frac{1}{\sin x}$.

§ 30. Der Mittelwertsatz.

Hilfssatz. Wenn $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$ ist und $f(x)$ weder bei a noch bei b noch auch zwischen a und b eine Unstetigkeit aufweist***), so gibt es zwischen a und b ein c derart, daß $f(c) = 0$ ist.

*) Es darf nicht $\cos x = 0$ sein.

**) Es darf nicht $\sin x = 0$ sein.

***) Wir verlangen genau gesagt folgendes: Wenn $a \leqq x_n \leqq b$ und $\lim x_n = x$ ist, so soll immer $\lim f(x_n) = f(x)$ sein.

Nehmen wir an, daß $f(x)$ zwischen a und b nirgends verschwindet (also das Gegenteil des Behaupteten). Dann ist $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ entweder positiv oder negativ. Im ersten Falle können die Werte $a_1 = \frac{a+b}{2}$, $b_1 = b$, im zweiten Falle die Werte $a_1 = a$, $b_1 = \frac{a+b}{2}$ die Rollen von a und b übernehmen; denn es ist $f(a_1) > 0$ und $f(b_1) < 0$. Von a_1 und b_1 gelangen wir in genau derselben Weise zu zwei neuen Werten a_2 und b_2, so daß $f(a_2) > 0$ und $f(b_2) < 0$ ist, usw. Wir gewinnen auf diese Weise in dem endlichen Intervall (a, b) zwei monotone Folgen. Jede von ihnen ist, wie wir wissen (vgl. S. 21), konvergent und beide haben denselben Grenzwert c, weil $b_n - a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (b - a)$, folglich $\lim (b_n - a_n) = 0$ ist.

Da wegen der Stetigkeit von $f(x)$

$$\lim f(a_n) = f(c)$$

ist und alle $f(a_n)$ positiv sind, so kann $f(c)$ nicht negativ sein. $f(c)$ kann aber auch nicht positiv sein, weil

$$\lim f(b_n) = f(c)$$

ist und alle $f(b_n)$ negativ sind. Es muß daher $f(c) = 0$ sein, und das widerspricht der zu Anfang gemachten Annahme, daß $f(x)$ zwischen a und b nirgends null ist.

Folgerung. Wenn $f(a) = A$, $f(b) = B$ $(\gtrless A)$, C eine Zahl zwischen A und B ist und $f(x)$ weder bei a noch bei b noch auch zwischen a und b eine Unstetigkeit aufweist, so gibt es zwischen a und b ein c derart, daß $f(c) = C$ ist.

Wir bilden, um diese Folgerung zu beweisen, $\varphi(x) = \frac{f(x) - C}{A - B}$

Dann ist $\varphi(x)$ ebenso wie $f(x)$ stetig, und außerdem ist $\varphi(a) > 0$, $\varphi(b) < 0$. Also gibt es nach dem Hilfssatz zwischen a und b ein c derart, daß $\varphi(c) = 0$ ist. Das heißt aber $f(c) = C$.

Theorem von Rolle. $f(x)$ sei weder bei a noch b unstetig*) und habe zwischen a und b überall eine Ableitung;

*) Wir verlangen genau gesagt folgendes: Wenn $a \leqq x_n \leqq b$ und $\lim x_n = a$ oder $\lim x_n = b$ ist, so soll immer $\lim f(x_n) = f(a)$ bezw. $\lim f(x_n) = f(b)$ sein.

ferner sei $f(a) = f(b)$. Dann gibt es zwischen a und b ein ξ derart, daß $f'(\xi) = 0$ ist.

Zunächst bemerken wir, daß $f(x)$ auch zwischen a und b überall stetig ist. Das folgt aus der Existenz der Ableitung. $f(x)$ hat also weder bei a noch bei b noch auch zwischen a und b eine Unstetigkeit. Wir wollen $\frac{b-a}{3} = k$ setzen und die Funktion

$$\varphi(x) = f(x+k) - f(x)$$

betrachten. x beschränken wir jetzt auf das Intervall $(a, a+2k)$ Offenbar hat dann $\varphi(x)$ weder bei a noch bei $a+2k$ noch auch zwischen a und $a+2k$ eine Unstetigkeit.

Nun ist

$$\varphi(a) + \varphi(a+k) + \varphi(a+2k) = f(a+k) - f(a) + f(a+2k) - f(a+k) + f(b) - f(a+2k) = f(b) - f(a) = 0,$$

und es bestehen folgende Möglichkeiten

1. $\varphi(a) = \varphi(a+k) = \varphi(a+2k) = 0$,
2. $\varphi(a)$, $\varphi(a+k)$, $\varphi(a+2k)$ nicht alle gleich Null.

Im zweiten Falle gibt es, weil

$$\varphi(a) + \varphi(a+k) + \varphi(a+2k) = 0$$

ist, unter den drei Größen $\varphi(a)$, $\varphi(a+k)$, $\varphi(a+2k)$ sicher eine positive und eine negative. Dann existiert aber auf Grund unseres Hilfssatzes zwischen a und $a+2k$ ein c derart, daß

$$\varphi(c) = f(c+k) - f(c) = 0$$

ist.

Auch im ersten Falle ist ein solches c vorhanden, nämlich $a+k$. Setzen wir $a_1 = c$, $b_1 = c+k$, so ist

$$a < a_1 < b_1 < b \text{ und } b_1 - a_1 = \frac{1}{3}(b-a),$$

und das Intervall (a_1, b_1) kann, da $f(a_1) = f(b_1)$ ist, die Rolle des Intervalls (a, b) übernehmen. Von (a_1, b_1) gelangen wir durch Wiederholung der obigen Betrachtungen zu einem Intervall (a_2, b_2) derart, daß

$$a_1 < a_2 < b_2 < b_1 \text{ und } b_2 - a_2 = \frac{1}{3}(b_1 - a_1),$$

ferner $f(a_2) = f(b_2)$ ist, usw.

Die aufsteigende Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ und die absteigende Folge $b_1, b_2, b_3, \ldots$ sind konvergent und haben, weil

$$\lim (b_n - a_n) = \lim \left(\frac{1}{3}\right)^n (b - a) = 0,$$

denselben Grenzwert ξ, und offenbar ist

$$a_n < \xi < b_n.$$

Setzen wir also $a_n = \xi + h_n$, $b_n = \xi + \bar{h}_n$, so ist $h_n < 0$ und $\bar{h}_n > 0$. Die Zähler der Differenzenquotienten

$$\frac{f(\xi + h_n) - f(\xi)}{h_n}, \qquad \frac{f(\xi + \bar{h}_n) - f(\xi)}{\bar{h}_n}$$

sind gleich, weil $f(a_n) = f(b_n)$ ist, die Nenner haben aber entgegengesetzte Zeichen. Die beiden Quotienten sind daher entweder null oder sie haben entgegengesetzte Zeichen. Machen wir nun die Festsetzung, daß u_n gleich dem positiven und v_n gleich dem negativen Quotienten sein soll und daß, wenn beide verschwinden, auch u_n und v_n gleich Null sind, so werden die Folgen

$$u_1, u_2, u_3, \ldots \quad \text{und} \quad v_1, v_2, v_3, \ldots$$

beide den Grenzwert $f'(\xi)$ haben, weil jene Quotienten beide nach $f'(\xi)$ konvergieren. Es ist also

$$\lim u_n = f'(\xi) \quad \text{und} \quad \lim v_n = f'(\xi).$$

Da $u_n \geqq 0$ ist, so kann $f'(\xi)$ nicht negativ sein, da $v_n \leqq 0$ ist, so kann $f'(\xi)$ nicht positiv sein. Folglich ist $f'(\xi) = 0$.

Nach diesen Vorbereitungen sind wir imstande, den sogenannten Mittelwertsatz zu beweisen. Er lautet so:

Wenn $f(x)$ weder bei a noch bei b unstetig ist und zwischen a und b überall eine Ableitung hat, so gibt es zwischen a und b einen Wert ξ derart, daß

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

ist.

Betrachten wir statt $f(x)$ die Funktion

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda x,$$

so läßt sich die Konstante λ so bestimmen, daß $\varphi(a) = \varphi(b)$ wird. Aus

$$f(a) + \lambda a = f(b) + \lambda b$$

ergibt sich nämlich sofort

$$\lambda = -\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Nachdem λ in dieser Weise bestimmt ist, können wir auf $\varphi(x)$ das Theorem von Rolle anwenden; $\varphi(x)$ erfüllt nämlich alle dort aufgeführten Bedingungen: $\varphi(x)$ ist weder bei a noch bei b unstetig (weil dies von $f(x)$ und λx gilt). $\varphi(x)$ hat ferner zwischen a und b überall eine Ableitung, nämlich $f'(x)+\lambda$, und es ist endlich $\varphi(a)=\varphi(b)$. Das Theorem von Rolle lehrt nun, daß es zwischen a und b ein ξ gibt derart, daß $\varphi'(\xi)=0$, also

$$f'(\xi)+\lambda = 0, \text{ d. h. } \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$$

ist.

Geometrische Interpretation des Mittelwertsatzes.

Denken wir uns den Kurvenbogen, der die Funktion $f(x)$ in dem Intervall (a, b) darstellt. A sei der Anfangspunkt, B der Endpunkt dieses Bogens. Die Sehne AB hat die Richtungskonstante*)

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

$f'(\xi)$ ist, wie wir wissen, die Richtungskonstante der Tangente unseres Kurvenbogens im Punkte $x=\xi$, $y=f(\xi)$. Der Mittel-

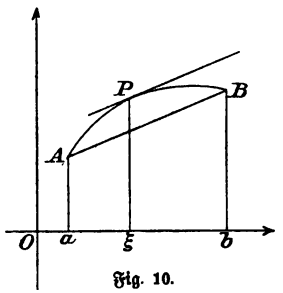


Fig. 10.

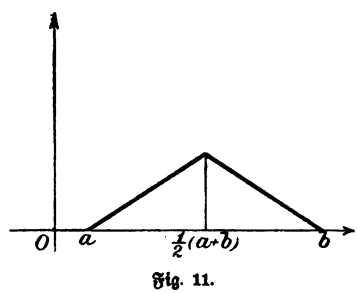


Fig. 11.

wertsatz sagt, daß diese Tangente parallel zur Sehne ist. Er sagt also, daß es unter den gemachten Voraussetzungen auf dem Kurven-

*) Die Richtungskonstante einer Geraden ist (vgl. S. 48) gleich $\operatorname{tg}\varphi$, wenn die Gerade mit der positiven Richtung der x-Achse den Winkel φ bildet.

bogen zwischen A und B einen Punkt P gibt, in welchem die Tangente parallel zu der Sehne AB ist.

Wenn die Funktion $f(x)$ durch folgende Festsetzungen definiert ist

$$f(x) = 0 \quad \text{für} \quad a \leqq x < b, \; f(b) = 1,$$

so hat sie zwischen a und b überall die Ableitung 0. Dagegen ist $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{1}{b-a}$. Daß hier der Mittelwertsatz nicht gilt, beruht auf der an der Stelle $x = b$ vorhandenen Unstetigkeit.

Fig. 11 zeigt uns eine Funktion, welche auch nicht den Mittelwertsatz erfüllt, und zwar deshalb, weil an der Stelle $x = \frac{a+b}{2}$ keine Ableitung existiert.

Andere Schreibweise der Formel des Mittelwertsatzes.

Setzt man $a = x$ und $b = x + h$ oder $b = x$ und $a = x + h$, so wird sich ξ, da es zwischen x und $x + h$ liegt, in der Form $\xi = x + \vartheta h$ schreiben lassen, wobei $0 < \vartheta < 1$ ist. Die Formel des Mittelwertsatzes lautet dann

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x + \vartheta h). \qquad (0 < \vartheta < 1).$$

Falls man $a = x$ und $b = x + h$ gesetzt hat, ist h positiv; falls man $b = x$ und $a = a + h$ gesetzt hat, ist h negativ. Die Formel gilt, sobald $f(x)$ bei x und bei $x + h$ stetig ist und zwischen x und $x + h$ überall eine Ableitung hat.

Sie lehrt, daß der Differenzenquotient $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ zu den Werten gehört, die die Ableitung $f'(x)$ zwischen x und $x + h$ annimmt.

Aus dem Mittelwertsatz ergibt sich, daß eine Funktion, die in einem Intervall überall die Ableitung Null hat, daselbst eine Konstante ist. Sind nämlich a und b irgend zwei Werte in jenem Intervall, so hat man

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi) = 0,$$

also $f(b) = f(a)$. Dieses Resultat ist für die Integralrechnung von Wichtigkeit.

§ 31. Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes.

Man kann den Mittelwertsatz leicht verallgemeinern. $g(x)$ sei eine Funktion, welche ebenso wie $f(x)$ weder bei a noch bei b unstetig ist und zwischen a und b überall eine Ableitung hat. Es sei aber nirgends $g'(x) = 0$. Wir können dann λ so wählen, daß

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda g(x)$$

der Bedingung $\varphi(a) = \varphi(b)$ genügt. Aus

$$f(a) + \lambda g(a) = f(b) + \lambda g(b)$$

ergibt sich nämlich*)

$$\lambda = -\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \qquad (0 < \vartheta < 1).$$

Durch Anwendung des Theorems von Rolle auf $\varphi(x)$ erhalten wir:

$$f'(\xi) + \lambda g'(\xi) = 0,$$

also

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \qquad (a < \xi < b).$$

Setzen wir $a = x$, $b = x + h$, oder $b = x$, $a = x + h$, so kommt:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{g(x+h) - g(x)} = \frac{f'(x + \vartheta h)}{g'(x + \vartheta h)}. \qquad (0 < \vartheta < 1)$$

§ 32. Differentiation einer zusammengesetzten Funktion.

$F(u)$ sei eine Funktion von u, die für $\alpha \leqq u \leqq \beta$ definiert ist; $f(x)$ eine Funktion von x, die für $a \leqq x \leqq b$ definiert ist; außerdem sei $f(x)$ so beschaffen, daß in dem ganzen Intervall (a, b)

$$\alpha \leqq f(x) \leqq \beta$$

ist. Setzen wir dann

$$u = f(x), \qquad y = F(u),$$

so gehört zu jedem Wert x in (a, b) ein Wert von u in (α, β) und zu diesem ein Wert von y. Es entspricht also durch Vermittelung von u jedem Wert von x ein Wert von y, so daß y eine Funktion

*) Daß $g(b) - g(a) \gtrless 0$ ist, folgt aus $g(b) - g(a) = (b - a)g'(\xi)$, weil $g'(\xi) \gtrless 0$.

von x ist. Wie y von x abhängt, das drückt die Formel

$$y = F(f(x))$$

aus. Man nennt $F(f(x))$ eine zusammengesetzte Funktion.

Beiläufig machen wir folgende Bemerkung:

Wenn $f(x)$ an der Stelle x und $F(u)$ an der Stelle $u = f(x)$ stetig ist, so ist auch $F(f(x))$ an der Stelle x stetig. In der Tat folgt aus $\lim x_n = x$ immer $\lim u_n = \lim f(x_n) = u$ und

$$\lim F(f(x_n)) = \lim F(u_n) = F(u) = F(f(x)).$$

Wir wollen jetzt voraussetzen, daß $f(x)$ in (a, b) überall eine Ableitung $f'(x)$ hat, ebenso $F(u)$ in (α, β) überall eine Ableitung $F'(u)$.

x sei ein fester und $x + \Delta x$ irgend ein anderer Wert in (a, b). Beim Übergange von x zu $x + \Delta x$ erfährt $u = f(x)$ den Zuwachs

$$\Delta u = f(x + \Delta x) - f(x)$$

und $y = F(u)$ den Zuwachs

$$\Delta y = F(u + \Delta u) - F(u).$$

Nach dem Mittelwertsatz ist nun

$$\Delta y = F'(u + \vartheta \Delta u)\Delta u^*), \qquad (0 < \vartheta < 1)$$

folglich

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = F'(u + \vartheta \Delta u)\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Lassen wir Δx nach Null konvergieren (wobei es aber immer ungleich Null bleiben muß), so wird

$$\lim \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(x)$$

und

$$\lim \Delta u = \lim \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta x = f'(x) \lim \Delta x = 0^{**}),$$

also auch

$$\lim \vartheta \Delta u = 0 \quad \text{und} \quad \lim (u + \vartheta \Delta u) = u.$$

Führen wir jetzt noch die Voraussetzung ein, daß $F'(u)$ in

---

*) Diese Formel gilt auch, wenn $\Delta u = 0$ ist.

**) Dies wußten wir schon, weil wir früher bewiesen haben, daß aus der Existenz von $f'(x)$ die Stetigkeit von $f(x)$ an der Stelle x folgt.

(α, β) stetig ist, so wird

$$\lim F'(u + \vartheta \Delta u) = F'(u)$$

und

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = F'(u) f'(x).$$

Das Differential von y entsteht hieraus durch Multiplikation mit dx. Wir haben also

$$dy = F'(u) f'(x) dx$$

oder, da

$$du = f'(x) dx$$

ist,

$$dy = F'(u) du$$

Das Differential von $y = F(u)$ würde genau so aussehen, wenn u selbst die unabhängige Veränderliche wäre. Das ist einer der Vorteile den das Differential im Vergleich zur Ableitung bietet.

Wir haben beim Beweise der Formel $dy = F'(u)\, du$ angenommen, daß $F'(u)$ stetig ist. Von dieser Voraussetzung kann man die Formel befreien. Lassen wir Δx eine nach Null konvergierende Zahlenfolge $h_1, h_2, h_3, \ldots$ (alle h_n ungleich Null) durchlaufen, so durchläuft Δu die Folge $k_1, k_2, k_3, \ldots$, wobei

$$k_n = f(x + h_n) - f(x) = h_n \frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n},$$

also $\lim k_n = 0$ ist.

Es können nun folgende Fälle eintreten.

1. In der Folge $k_1, k_2, k_3, \ldots$ gibt es nur eine endliche Anzahl nicht verschwindender Glieder.

2. In der Folge $k_1, k_2, k_3, \ldots$ gibt es unendlich viele nichtverschwindende Glieder.

Da im ersten Falle „fast alle" k_n gleich Null sind, so gilt dasselbe von den Quotienten

$$\frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n}, \quad \frac{F(u+k_n) - F(u)}{h_n}.$$

Es ist also sicher

$$\lim \frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n} = f'(x) = 0$$

und

$$\lim \frac{F(u+k_n) - F(u)}{h_n} = 0 = F'(u) f'(x).$$

Im zweiten Falle möge durch Unterdrückung der verschwindenden Glieder aus $k_1, k_2, k_3, \ldots$ die Folge $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \ldots$ entstehen, und $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ seien die entsprechenden Glieder in $h_1, h_2, h_3, \ldots$ Dann ist

$$\frac{F(u+\varkappa_n)-F(u)}{\delta_n} = \frac{F(u+\varkappa_n)-F(u)}{\varkappa_n} \cdot \frac{\varkappa_n}{\delta_n}$$
$$= \frac{F(u+\varkappa_n)-F(u)}{\varkappa_n} \cdot \frac{f(x+\delta_n)-f(x)}{\delta_n},$$

also wegen $\lim \delta_n = 0$, $\lim \varkappa_n = 0$*)

$$\lim \frac{F(u+\varkappa_n)-F(u)}{\delta_n} = F'(u) f'(x).$$

Gibt es in $k_1, k_2, k_3, \ldots$ nur eine endliche Anzahl verschwindender Glieder, so ist auch

$$\lim \frac{F(u+k_n)-F(u)}{h_n} = F'(u) f'(x).$$

Bilden dagegen die verschwindenden Glieder in $k_1, k_2, k_3, \ldots$ eine Folge $\bar{\varkappa}_1, \bar{\varkappa}_2, \bar{\varkappa}_3, \ldots$ und entsprechen ihnen in $h_1, h_2, h_3, \ldots$ die Glieder $\bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2, \bar{\delta}_3, \ldots$, so sind die Quotienten

$$\frac{f(x+\bar{\delta}_n)-f(x)}{\bar{\delta}_n} \quad \text{und} \quad \frac{F(u+\bar{\varkappa}_n)-F(u)}{\delta_n}$$

alle gleich Null. Man hat daher

$$\lim \frac{f(x+\bar{\delta}_n)-f(x)}{\bar{\delta}_n} = f'(x) = 0$$
$$\lim \frac{F(u+\bar{\varkappa}_n)-F(u_n)}{\bar{\delta}_n} = 0 = F'(u) f'(x).$$

Wir erhalten also $F'(u) f'(x)$ als Grenzwert sowohl, wenn h_n die Folge $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ durchläuft, als auch, wenn es die Folge $\bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2, \bar{\delta}_3, \ldots$ durchläuft. Daraus folgt aber*)

$$\lim \frac{F(u+k_n)-F(u)}{h_n} = F'(u) f'(x).$$

§ 33. Beispiele.

1. $y = e^{f(x)}$.

$$dy = e^{f(x)}\, d f(x) = e^{f(x)} f'(x)\, dx.$$

*) Vgl. die Bemerkungen am Schluß von § 11.

2. x^μ ($x>0$ und μ eine beliebige Zahl) läßt sich so schreiben:

$$x^\mu = e^{\mu \log x}.$$

Nach Nr. 1 ist also

$$d\,x^\mu = e^{\mu \log x}\, d\,(\mu \log x) = \mu\, e^{\log x}\, \frac{d\,x}{x}$$

oder

$$d\,x^\mu = \mu\, x^{\mu-1}\, d\,x\,.$$

3. $$y = \log f(x)\,,\quad f(x)>0\,.$$

$$d\,y = \frac{d\,f(x)}{f(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)}\, d\,x\,.$$

Z. B. ist

$$d \log \sin x = \cot x\, dx\,, \qquad (\sin x > 0)$$

$$d \log \cot x = -\operatorname{tg} x\, dx\,, \qquad (\cos x > 0)$$

$$d \log \operatorname{tg} x = \frac{d\,x}{\sin x \cos x} = \frac{2\,d\,x}{\sin 2x}\,, \qquad (\operatorname{tg} x > 0)$$

$$d \log \cot x = -\frac{d\,x}{\sin x \cos x} = -\frac{2\,dx}{\sin 2x}\,. \qquad (\cot x > 0)$$

4. $$y = \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right).$$

$$dy = \frac{d\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{dx + d\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}\,.$$

Nach Nr. 2 ist

$$d\sqrt{1+x^2} = d\,(1+x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\, d\,(1+x)^2$$

$$= \frac{x\,d\,x}{\sqrt{1+x^2}}\,.$$

Man findet schließlich

$$dy = \frac{d\,x}{\sqrt{1+x^2}}\,.$$

§ 34. Umkehrung einer stetigen Funktion.

$y = f(x)$ sei in dem Intervall (a, b), einschließlich der Grenzen a und b, überall stetig. Wir wollen versuchen diese Funktion umzukehren, d. h. x als Funktion von y zu betrachten. Soll dies möglich sein, so darf die Funktion keinen Wert mehr als einmal annehmen; sonst würden nämlich zu jenem Wert von y mehrere Werte von x gehören, was unsererem Funktions-

begriff widerspräche (wonach jedem Wert der unabhängigen nur ein Wert der abhängigen Veränderlichen zugeordnet sein soll).

Wenn also c und c_1 zwei verschiedene Werte aus (a, b) sind, so ist immer $f(c) \gtrless f(c_1)$. Wir wollen jetzt irgend drei Werte x_1, x_2, x_3 aus (a, b) herausgreifen, die in der Beziehung

$$x_1 < x_2 < x_3$$

stehen, so daß x_2 zwischen x_1 und x_3 liegt. Es läßt sich zeigen, daß dann auch $f(x_2)$ zwischen $f(x_1)$ und $f(x_3)$ liegt. Würde nämlich der Wert $f(x_2)$ außerhalb des Intervalls $(f(x_1), f(x_3))$ liegen, so gäbe es einen Wert C, der sowohl zwischen $f(x_1)$ und $f(x_2)$ als auch zwischen $f(x_2)$ und $f(x_3)$ liegt. Da die Funktion $f(x)$ stetig ist, so müßte sie diesen Wert C an einer Stelle c zwischen x_1 und x_2 und auch an einer Stelle c_1 zwischen x_2 und x_3 annehmen (vgl. § 30). Es wäre also $f(c) = f(c_1)$ und $c < c_1$.

Aus dem Obigen geht hervor, daß $f(x)$, wenn x von a bis b zunimmt, entweder beständig wächst oder beständig abnimmt. Um einen bestimmten Fall zu haben, wollen wir uns denken, daß $f(x)$ bei zunehmendem x beständig wächst*).

Wir können uns leicht überzeugen, daß eine solche Funktion sich umkehren läßt. $A = f(a)$ ist der kleinste und $B = f(b)$ der größte Wert von $f(x)$ und jede Zahl C zwischen A und B ist ebenfalls ein Funktionswert (nach § 30). Die Werte von $f(x)$ füllen also das ganze Intervall (A, B) aus. Da jeder Wert von der Funktion nur einmal angenommen wird, so entspricht jedem y in $(A\ B)$ ein und nur ein x in (a, b) derart, daß $y = f(x)$ ist. x ist also in dem Intervall (A, B) eine Funktion von y:

$$x = \varphi(y).$$

Diese Funktion nennt man die Umkehrung (die inverse Funktion) von $y = f(x)$**). Bei zunehmendem y wächst offenbar $\varphi(y)$ beständig. $\varphi(y)$ ist ferner in dem Intervall (A, B) stetig. Hat man nämlich in (A, B) eine nach y konvergierende Folge $y_1, y_2, y_3, \ldots$, deren sämtliche Glieder größer (kleiner) als y sind***), und ist $x = \varphi(y)$, $x_n = \varphi(y_n)$, so muß $\lim x_n = x$ sein. Zunächst sind alle x_n größer (kleiner) als x. Gäbe es unendlich

*) Wenn $f(x)$ mit zunehmendem x abnimmt, so betrachten wir $-f(x)$.

**) Ebenso ist $y = f(x)$ die Umkehrung von $x = \varphi(y)$.

***) Es genügt solche Folgen zu betrachten.

viele x_n, die größer als $x+\varepsilon$ (kleiner als $x-\varepsilon$) sind, so wären die entsprechenden y_n größer als $f(x+\varepsilon)$ (kleiner als $f(x-\varepsilon)$), was der Voraussetzung $\lim y_n = y = f(x)$ widerspricht.

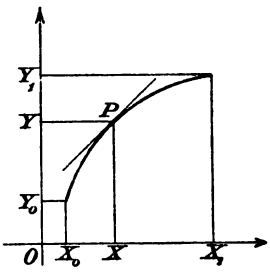


Fig. 12.

Fig. 12 soll dazu dienen, die Beziehung zwischen den beiden Funktionen $y=f(x)$ und $x=\varphi(y)$ zu veranschaulichen. Es ist $\overline{OX}=x$ und $\overline{OY}=y$. Wenn der Punkt X sich auf der x-Achse in positiver Richtung von X_0 nach X_1 bewegt ($\overline{OX_0}=a$, $\overline{OX_1}=b$), so bewegt sich der Punkt Y auf der y-Achse in positiver Richtung von Y_0 nach Y_1 ($\overline{OY_0}=A$, $\overline{OY_1}=B$) und umgekehrt. Geometrisch kommt die Umkehrung einer Funktion auf eine Vertauschung der beiden Koordinatenachsen hinaus.

Bemerkung. Wenn eine Funktion $f(x)$ zwischen a und b überall eine positive Ableitung hat, so wächst $f(x)$, wenn x von a bis b zunimmt. In der Tat folgt aus

$$f(x+h)-f(x)=h\,f'(x+\vartheta h) \qquad (0<\vartheta<1)$$

für $h>0$ immer $f(x+h)-f(x)>0$.

Die Ableitung darf auch an einer endlichen Anzahl von Stellen null sein oder nicht existieren. Ist z. B. $f'(c)=0$, $a<c<b$, aber sonst im Innern von (a,b) überall $f'(x)>0$, so wächst $f(x)$, wenn x von a bis c, und auch, wenn x von c bis b zunimmt.

Im Falle $f'(x)<0$ nimmt $f(x)$ ab.

Wenn die Funktion $f(x)$ beständig zunimmt, während x von a bis b wächst, so kann sie zwischen a und b nirgends eine negative Ableitung haben. Es ist nämlich für $h>0$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}>0\,.$$

Eine negative Größe kann aber nicht der Grenzwert einer positiven Zahlenfolge sein. Also muß $f'(x)\geqq 0$ sein, falls $f'(x)$ existiert. Ebenso muß, wenn $f(x)$ mit wachsendem x abnimmt, $f'(x)\leqq 0$ sein, falls $f'(x)$ existiert.

§ 35. Beispiele.

1. $y=e^x$ hat die Umkehrung $x=\log y$.

2. $y=\sin x$ ist stetig und nimmt beständig zu (von -1 bis 1),

wenn x von $-\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{\pi}{2}$ wächst. Die inverse Funktion $x = \varphi(y)$ ist also in dem Intervall $(-1, 1)$ stetig und wächst bei zunehmendem y. Offenbar ist $\varphi(y) = \arcsin y$.

$$y = \operatorname{tg} x \qquad \left(-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

hat die inverse Funktion $\operatorname{arctg} y$.

Die inverse Funktion zu $y = \cos x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ ist $\arccos y$.

$y = \operatorname{cot} x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ hat die inverse Funktion $\operatorname{arc\,cot} y$.

Die zyklometrischen Funktionen sind also die inversen der trigonometrischen.

3. $y = x^m$ läßt sich, wenn m eine der Zahlen 1, 3, 5, ... in jedem Intervall (a, b) umkehren, weil $y' = m\,x^{m-1}$ (da $m-1$ gerade) positiv ist und nur für $x = 0$ verschwindet. Die Umkehrung lautet $\sqrt[m]{y}$.

Ist m eine der Zahlen 2, 4, 6, ..., so läßt sich $y = x^m$ nicht in jedem Intervall umkehren, wohl aber in jedem Intervall, welches die Null nicht umschließt. In $(0, \infty)$ lautet die Umkehrung $x = +\overset{1}{y^m}$, in $(0, -\infty)$ dagegen $x = -\overset{1}{y^m}$.

§ 36. Differentiation der inversen Funktionen.

$y = f(x)$ sei für $a \leqq x \leqq b$ stetig und nehme beständig zu, wenn x von a bis b wächst.

Es existiere überdies in (a, b) überall die Ableitung $f'(x)$ und sie sei nirgends null*).

Ist y eine feste und $y + k$ irgend eine andere Zahl zwischen A und B, ist ferner $x = \varphi(y)$ und $x + h = \varphi(y + k)$, so hat man

$$\frac{\varphi(y+k) - \varphi(y)}{k} = \frac{h}{f(x+h) - f(x)} = \frac{1}{\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

folglich

$$\lim_{k=0} \frac{\varphi(y+k) - \varphi(y)}{k} = \frac{1}{f'(x)},$$

weil mit k auch h nach Null konvergiert.

*) Nach der Bemerkung am Schluß von § 34 ist dann $f'(x)$ stets positiv.

Die inverse Funktion hat also zwischen A und B überall eine Ableitung $\varphi'(y)$, und es ist

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Nachdem wir bewiesen haben, daß $\varphi'(y)$ existiert, können wir uns bei der wirklichen Berechnung von $\varphi'(y)$ der in § 32 gegebenen Regel bedienen. Danach ist das Differential von $y = f(x)$ immer

$$dy = f'(x)\,dx,$$

ob wir nun x oder y als unabhängige Veränderliche betrachten. Nehmen wir y als unabhängige Veränderliche, so liefert uns diese Gleichung

$$\frac{dx}{dy} = \varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Geometrisch betrachtet ist diese Relation zwischen $f'(x)$ und $\varphi'(y)$ etwas Selbstverständliches (vgl. Fig. 12). $f'(x)$ und $\varphi'(y)$ sind Richtungskonstanten der Kurventangente in P, und zwar $f'(x)$ in Bezug auf die x-Achse, $\varphi'(y)$ in Bezug auf die y-Achse. Daraus sieht man, daß jede der reziproke Wert der andern sein muß (wie $\cot\varphi$ von $\operatorname{tg}\varphi$).

§ 37. Differentiation der zyklometrischen Funktionen.

1. $$y = \operatorname{arc\,sin} x$$

hat die Umkehrung $x = \sin y$. Für $-1 < x < 1$ ist

$$dx = \cos y\,dy$$

und

$$dy = \frac{dx}{\cos y},$$

also:

$$d \operatorname{arc\,sin} x = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Die Wurzel ist positiv zu nehmen, weil (nach der Definition von arc sin) y zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ liegt, also $\cos y > 0$ ist.

2. $$y = \operatorname{arc\,cos} x$$

hat die Umkehrung $x = \cos y$. Für $-1 < x < 1$ ist

$$dx = -\sin y\,dy,$$

und

$$dy = -\frac{dx}{\sin y},$$

also

$$d \operatorname{arc\,cos} x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Die Wurzel ist auch hier positiv zu nehmen, weil (nach der Definition von arc cos) y zwischen 0 und π liegt, also $\sin y > 0$ ist.

3. $$y = \operatorname{arc\,tg} x$$

hat die Umkehrung $x = \operatorname{tg} y$. Für jedes x ist (vgl. S. 53)

$$dx = (1 + \operatorname{tg}^2 y)\, dy,$$

also

$$dy = \frac{dx}{1+x^2}$$

d. h.

$$d \operatorname{arc\,tg} x = \frac{dx}{1+x^2}.$$

4. $$y = \operatorname{arc\,cot} x$$

hat die Umkehrung $x = \operatorname{cot} y$. Für jedes x ist (vgl. S. 53)

$$dx = -(1 + \operatorname{cot}^2 y)\, dy,$$

also

$$dy = -\frac{dx}{1+x^2},$$

d. h.

$$d \operatorname{arc\,cot} x = -\frac{dx}{1+x^2}.$$

§ 38. Differentiation der Potenzreihen.

Die Potenzreihe $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$, deren Konvergenzradius nicht gleich Null sei, stellt im Innern des Konvergenzintervalls eine Funktion $f(x)$ dar. Wir wollen jetzt versuchen, die Ableitung von

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

zu berechnen.

Wären „fast alle" Koeffizienten gleich Null, also $f(x)$ eine ganze rationale Funktion, so hätten wir

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots$$

Wir werden beweisen, daß diese Formel immer gilt. Zunächst zeigen wir folgendes.

Die Potenzreihe

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots,$$

hat denselben Konvergenzradius wie

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$$

Ist x ein beliebiger Wert im Innern des Konvergenzintervalles von $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$, so können wir im Innern dieses Intervalles x_0 so wählen, daß $|x| < |x_0|$ ist. Wir wissen (vgl. S. 41), daß sich die Zahlen $a_nx_0^n$, also auch die Zahlen $a_nx_0^{n-1}$, alle in ein endliches Intervall $(-G, G)$ einschließen lassen, so daß $|a_nx_0^n| < G$ ist. Nun hat man aber

$$na_nx^{n-1} = a_nx_0^{n-1} \cdot n\left(\frac{x}{x_0}\right)^{n-1}$$

folglich

$$|na_nx^{n-1}| < G \cdot nq^{n-1}. \qquad \left(q = \frac{x}{x_0}\right)$$

Da $|q| < 1$ ist, so konvergiert die Reihe (vgl. S. 40)

$$1 + 2q + 3q^2 + \cdots$$

also auch

$$|a_1| + |2a_2x| + |3a_3x^2| + \cdots$$

Ist x ein Wert im Innern des Konvergenzintervalls von $a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots$, so konvergiert die Reihe

$$|a_1| + |2a_2x| + |3a_3x^2| + \cdots,$$

also auch die Reihe $|a_1x| + 2|a_2x^2| + 3|a_3x^3| + \cdots$ und um so mehr die Reihe $|a_0| + |a_1x| + |a_2x^2| + \cdots$

Auch die Reihe $2 \cdot 1a_2 + 3 \cdot 2a_3x + 4 \cdot 3a_4x^2 + \cdots$, die aus $a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots$ in derselben Weise*) entsteht wie diese aus $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$, hat dasselbe Konvergenzintervall wie $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ Das Gleiche gilt von der Reihe $3 \cdot 2 \cdot 1a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2a_4x + 5 \cdot 4 \cdot 3a_5x^2 + \cdots$ u. s. f.

Wie bisher seien x und x_0 zwei Werte im Innern des Konvergenzintervalls der Reihe $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$, und es sei $|x| < |x_0|$ Unter h wollen wir eine nach Null konvergierende,

*) Nämlich durch gliedweise ausgeführte Differentiation.

aber von Null verschiedene Größe verstehen und annehmen*), daß auch $|x+h|<|x_0|$. Dann ist

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=a_1\frac{(x+h)-x}{h}+a_2\frac{(x+h)^2-x^2}{h}+a_3\frac{(x+h)^3-x^3}{h}+\cdots$$

Subtrahieren wir hiervon

$$\varphi(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots,$$

so kommt:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\varphi(x)=a_2\left\{\frac{(x+h)^2-x^2}{h}-2x\right\}+a_3\left\{\frac{(x+h)^3-x^3}{h}-3x^2\right\}+\cdots$$

Nach dem Mittelwertsatz ist nun:

$$\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=n\xi_n^{n-1},$$

wobei ξ_n zwischen x und $x+h$ liegt. Es wird hiernach

$$\frac{(x+h)^n-x^n}{h}-nx^{n-1}=n(\xi_n^{n-1}-x^{n-1}).$$

Auf Grund des Mittelwertsatzes ist aber ferner

$$\xi_n^{n-1}-x^{n-1}=(\xi_n-x)(n-1)\bar{\xi}_n^{n-2},$$

wobei $\bar{\xi}_n$ zwischen x und ξ_n, also sicher zwischen x und $x+h$ liegt. Alles in allem ist also:

$$\frac{(x+h)^n-x^n}{h}-nx^{n-1}=n(n-1)\bar{\xi}_n^{n-2}(\xi_n-x),$$

mithin

$$\left|\frac{(x+h)^n-x^n}{h}-nx^{n-1}\right|<n(n-1)|x_0|^{n-2}|h|,$$

weil

$$|\bar{\xi}_n|<|x_0| \text{ und } |\xi_n-x|<|h|.$$

Jetzt können wir aber schreiben**):

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\varphi(x)\right|<|h|(2\cdot1|a_2|+3\cdot2|a_3x_0|+\cdots)$$

*) Diese Annahme ist wegen $\lim h=0$ erlaubt.

**) Bei einer absolut konvergenten Reihe ist $|u_1+u_2+\cdots|$ kleiner oder gleich $|u_1|+|u_2|+\cdots$

Daraus folgt

$$\lim_{h=0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\varphi(x)\right\}=0$$

oder

$$\lim_{h=0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\varphi(x),\ \text{also}\ \varphi(x)=f'(x).$$

Die Potenzreihe $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$ hat also im Innern ihres Konvergenzintervalls überall die Ableitung $a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots$ Man erhält sie, indem man die Reihe $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$ gliedweise differenziert.

§ 39. Anwendungen.

Berechnung der Logarithmen.

Es sei $|x|<1$. Die Funktion

$$f(x)=\log(1+x)$$

hat die Ableitung*)

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots \text{ (vgl. S. 33.)}$$

Diese Potenzreihe ist aber die Ableitung von

$$F(x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots$$

Es ist also

$$F'(x)=f'(x),\ \text{d. h.}\ (F(x)-f(x))'=0.$$

Daraus folgt (vgl. S. 58)

$$F(x)-f(x)=c$$

(c eine Konstante). Nun hat man aber $F(0)=f(0)=0$, also auch $c=0$. Mithin ist $F(x)=f(x)$, also

$$\log(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots \qquad (|x|<1)$$

In dieser Reihe dürfen wir, weil dabei $|x|<1$ bleibt, x durch $-x$ ersetzen. Wir erhalten dadurch

$$\log(1-x)=-\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots$$

*) Man denke an die Differentiation der zusammengesetzten Funktionen.

Subtrahiert man dieſe beiden Reihen, ſo ergibt ſich für

$$\log(1+x) - \log(1-x) = \log\frac{1+x}{1-x}$$

die Formel

$$\log\frac{1+x}{1-x} = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right). \quad (|x| < 1)$$

Iſt n eine der Zahlen 1, 2, 3, ..., ſo darf man in dieſer Formel offenbar

$$x = \frac{1}{2n+1}$$

ſetzen. Dann wird aber

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{2n+2}{2n} = \frac{n+1}{n},$$

und man erhält

$$\log(n+1) - \log n = 2\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \cdots\right).$$

Für $n = 1$ liefert dieſe Formel

$$\log 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \cdots\right)$$

$$= \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{3}\frac{1}{9} + \frac{1}{5}\frac{1}{9^2} + \cdots\right).$$

Setzt man

$$s_\nu = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{3}\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{2\nu-1}\frac{1}{9^{\nu-1}}\right),$$

ſo wird

$$\log 2 = s_\nu + \varepsilon_\nu,$$

und man hat

$$\varepsilon_\nu < \frac{2}{3(2\nu+1)9^\nu}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \cdots\right)$$

alſo

$$\varepsilon_\nu < \frac{1}{12(2\nu+1)9^{\nu-1}}.$$

Hiernach iſt es leicht, $\log 2$ mit vorgeſchriebener Genauigkeit zu berechnen.

Für $n = 4$ liefert unſere Formel

$$\log 5 - \log 4 = 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3\cdot 9^3} + \frac{1}{5\cdot 9^5} + \cdots\right).$$

Also ist

$$\log 5 = 2\log 2 + \frac{2}{9}\left(1 + \frac{1}{3\cdot 81} + \frac{1}{5\cdot 81^2} + \cdots\right).$$

Hieraus läßt sich $\log 5$ mit vorgeschriebener Genauigkeit berechnen. Wir können also auch $\log 2 + \log 5 = \log 10$ beliebig genau berechnen und

$$M = \frac{1}{\log 10},^{*})$$

den Modul (vgl. S. 52) der gemeinen Logarithmen (d. h. der Logarithmen zur Basis 10). Multiplizieren wir die Formel für $\log(n+1) - \log n$ mit M und schreiben statt ${}^{10}\log$ kurz Log, so gewinnen wir

$$\operatorname{Log}(n+1) - \operatorname{Log} n = 2M\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \cdots\right).$$

Mit Hilfe dieser Formel läßt sich eine Logarithmentafel berechnen. Wünscht man die Logarithmen der ganzen Zahlen von 1 bis 10^5, so genügt es, die Logarithmen der 5-stelligen Zahlen zu berechnen (denn es ist z. B. $\operatorname{Log} 13 = \operatorname{Log}\frac{13000}{10^3} = -3 + \operatorname{Log} 13000$). In obiger Formel ist also $n \geqq 10^4$. Setzt man nun

$$\operatorname{Log}(n+1) - \operatorname{Log} n = \frac{2M}{2n+1} + \delta_n,$$

so wird (weil $2M < 1$)

$$\delta_n < \frac{1}{3(2n+1)^3}\left(1 + \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^4} + \cdots\right)$$

oder, da

$$1 + \frac{1}{(2n+1)^3} + \frac{1}{(2n+1)^4} + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{(2n+1)^2}} = \frac{(2n+1)^2}{2n(2n+2)}$$

ist,

$$\delta_n < \frac{1}{12n(n+1)(2n+1)} < \frac{1}{24n^3} < \frac{1}{10^{15}}.$$

Kennt man also $\operatorname{Log} n$ (wie es z. B. bei der Annahme $n = 10^4$ der Fall ist), so ist

$$\operatorname{Log}(n+1) = \operatorname{Log} n + \frac{2M}{n+1}$$

bis auf weniger als eine Einheit in der 13. Dezimale.

*) Man findet $M = 0{,}4342944819\ldots$

Berechnung der Zahl π.

Es sei wieder $|x|<1$. Die Funktion

$$\varphi(x) = \operatorname{arc\,tg} x$$

hat die Ableitung

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots$$

Diese Potenzreihe ist aber die Ableitung von

$$\Phi(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$

Es ist also

$$\Phi'(x) = \varphi'(x)$$

folglich

$$\Phi(x) - \varphi(x) = c.$$

c ist aber, weil $\Phi(0) = 0$ und $\varphi(0) = 0$, gleich Null, mithin

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots \qquad (|x|<1)$$

Setzen wir*)

$$s = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots,$$

so wird, wenn $0 < x_n < 1$ ist,

$$s - \operatorname{arc\,tg} x_n = 1 - x_n - \frac{1-x_n^3}{3} + \frac{1-x_n^5}{5} - \cdots$$

eine alternierende Reihe, in welcher die Beträge der Glieder eine absteigende Folge bilden. In der Tat ist nach dem in § 31 bewiesenen verallgemeinerten Mittelwertsatz, wenn wir $f(x) = x^{2\nu+1}$, $g(x) = x^{2\nu-1}$ setzen**),

$$\frac{1-x_n^{2\nu+1}}{1-x_n^{2\nu-1}} = \frac{f(1)-f(x_n)}{g(1)-g(x_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}$$
$$= \frac{(2\nu+1)\xi_n^{2\nu}}{(2\nu-1)\xi_n^{2\nu-2}} = \frac{2\nu+1}{2\nu-1}\xi_n^2 < \frac{2\nu+1}{2\nu-1},$$

weil $x_n < \xi_n < 1$. Hieraus folgt aber

$$\frac{1-x_n^{2\nu+1}}{2\nu+1} < \frac{1-x_n^{2\nu-1}}{2\nu-1}.$$

*) Diese Reihe ist konvergent (vgl. S. 33).

**) Die Bedingung $g'(x) \gtrless 0$ ist erfüllt.

Bei einer alternierenden Reihe dieser Art sind aber, wie wir wissen, die Partialsummen mit ungeradem Index größer, die mit geradem Index kleiner als die Summe der Reihe. Mithin ist

$$1 - x_n - \frac{1 - x_n^3}{3} < s - \operatorname{arc\,tg} x_n < 1 - x_n.$$

Lassen wir nun x_n nach 1 konvergieren (wobei aber immer $x_n < 1$ bleibt), so ergibt sich

$$\lim (s - \operatorname{arc\,tg} x_n) = 0,$$

also

$$\lim \operatorname{arc\,tg} x_n = \operatorname{arc\,tg} 1 = s.$$

Damit ist bewiesen, daß unsere Formel für $\operatorname{arc\,tg} x$ auch im Falle $x = 1$ noch gilt*). Da nun $\operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}$ ist, so haben wir

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Das ist die Leibnizsche Reihe für $\frac{\pi}{4}$, die aber für die Berechnung von π sehr ungeeignet ist.

Am bequemsten wird die Berechnung von π, wenn man sich folgender Überlegung bedient.

Aus den Formeln für $\cos(\varphi_1 \pm \varphi_2)$ und $\sin(\varphi_1 \pm \varphi_2)$ folgt

$$\operatorname{tg}(\varphi_1 \pm \varphi_2) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_1 \pm \operatorname{tg}\varphi_2}{1 \mp \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2}.$$

Ist nun $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{5}$, so wird nach dieser Formel

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{5}{12},$$

$$\operatorname{tg} 4\varphi = \frac{120}{119} = 1 + \frac{1}{119},$$

$$\operatorname{tg}\left(4\varphi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} 4\varphi - 1}{\operatorname{tg} 4\varphi + 1} = \frac{1}{239}.$$

Hiernach hat man

$$4\varphi - \frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239}.$$

*) In ähnlicher Weise zeigt man, daß die Formel für $\log(1 + x)$ auch im Falle $x = 1$ noch gilt, daß also $\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ ist.

Andererseits ist $\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}$, also

$$\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239},$$

d. h.

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} - \cdots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3\cdot 239^3} + \frac{1}{5\cdot 239^5} - \cdots\right)$$

Nach dieser Formel hat man π bis auf 707 Dezimalstellen berechnet. Es gibt ein paar französische Verse, mit deren Hilfe man sich die ersten 30 Ziffern von π merken kann. Sie lauten:

Que j' aime à faire apprendre un nombre utile aux sages!
Immortel Archimède, artiste ingénieur,
Qui de ton jugement peut priser la valeur!
Pour moi ton problème eut de pareils avantages.

Ersetzt man jedes Wort durch die Zahl seiner Buchstaben, so erhält man die ersten 31 Ziffern von π; hinter der ersten von ihnen steht das Komma. Auf diese Weise ergibt sich:

$$\pi = 3,14159265358979323846264338327 9\ldots$$

Der binomische Lehrsatz.

Wir schicken folgende Bemerkung voraus:

Wenn zwei Potenzreihen für $|x| < \varrho$ konvergieren und dieselbe Summe haben, so sind sie überhaupt miteinander identisch. Ist nämlich für $|x| < \varrho$

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots,$$

so ist auch (vergl. § 38)

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots = b_1 + 2b_2 x + 2b_3 x^2 \cdots$$

Diese Gleichung kann man wieder differenzieren usf. Setzt man überall $x = 0$, so ergibt sich, daß allgemein $a_n = b_n$ ist.

Es sei nunmehr m eine positive ganze Zahl. Wenn man

$$(1+x)^m = (1+x)(1+x)\cdots(1+x)$$

ausmultipliziert, so ergibt sich ein Resultat von folgender Form:

$$(1+x)^m = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots *)$$

*) $c_{m+1}, c_{m+2}, \cdots$ sind alle null.

Durch Differentiation erhält man

$$m(1+x)^{m-1} = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \cdots$$

Multipliziert man beiderseits mit $1+x$, so kommt

$$m(1+x)^m = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \cdots$$
$$+ c_1x + 2c_2x^2 + \cdots$$

Andererseits ist aber

$$m(1+x)^m = m + mc_1x + mc_2x^2 + \cdots$$

Daraus folgt

$$c_1 = m, \quad 2c_2 = (m-1)c_1, \quad 3c_3 = (m-2)c_2, \cdots,$$

also

$$c_1 = \frac{m}{1}, \quad c_2 = \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}, \quad c_3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}, \cdots$$

Man pflegt

$$\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

mit $\binom{m}{k}$ oder $(m)_k$ zu bezeichnen.*)

Nach dem Obigen ist dann

$$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \cdots **)$$

Diese Formel ist der binomische Lehrsatz (die Binomialformel) für positive ganzzahlige Exponenten.

Wir wissen, daß für $|x| < 1$

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - \cdots$$

ist. Da nun

$$\binom{-1}{k} = \frac{(-1)(-2)\cdots(-k)}{1\cdot 2\cdots k} = (-1)^k \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

ist, so können wir schreiben

$$(1+x)^{-1} = 1 + \binom{-1}{1}x + \binom{-1}{2}x^2 + \cdots$$

*) Diese Bezeichnung wendet man auch an, wenn m nicht ganz und positiv, sondern eine beliebige andere Zahl ist.

**) Die Reihe bricht ab, da $(m)_k$ für $k > m$ verschwindet.

Die Binomialformel gilt also auch (vorausgesetzt, daß $|x|<1$ ist) für den Exponenten -1.

Wir wollen jetzt eine Potenzreihe suchen, die im Innern ihres Konvergenzintervalls mit sich selbst multipliziert $1+x$ liefert. Ihr Anfangsglied ist offenbar gleich ± 1. Wir können aber annehmen, daß es gleich 1 ist.*) Dann lautet die Potenzreihe

$$1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots,$$

und es soll also im Innern ihres Konvergenzintervalls

$$(1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)(1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) = 1 + x$$

sein. Differenzieren wir, so kommt

$$2(1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots) = 1.$$

Multiplizieren wir auf beiden Seiten mit $1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$, so ergibt sich

$$2(1+x)(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

d. h.

$$a_1 + (2a_2 + a_1)x + (3a_3 + 2a_2)x^2 + \cdots = \frac{1}{2}(1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots).$$

Hieraus folgt

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad 2a_2 = a_1\left(\frac{1}{2} - 1\right), \quad 3a_3 = a_2\left(\frac{1}{2} - 2\right), \cdots,$$

also

$$a_1 = \left(\frac{1}{2}\right)_1, \quad a_2 = \left(\frac{1}{2}\right)_2, \quad a_3 = \left(\frac{1}{2}\right)_3, \cdots$$

Da

$$\frac{a_{n-1}x^{n-1}}{a_n x^n} = \frac{n}{\frac{1}{2} - n + 1}\, x$$

dem Grenzwert $-x$ zustrebt, so hat die Potenzreihe

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right)_1 x + \left(\frac{1}{2}\right)_2 x^2 + \cdots$$

den Konvergenzradius 1 (vgl. S. 34). Setzen wir

$$f(x) = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)_1 x + \left(\frac{1}{2}\right)_2 x^2 + \cdots, \qquad (-1 < x < 1)$$

so ist nach dem Obigen

$$2f'(x)(1 + x) = f(x)$$

*) Andernfalls multiplizieren wir die Reihe mit -1.

oder, wenn wir durch $2(1+x)^{\frac{3}{2}}$ dividieren,

$$\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}f'(x) - f(x)\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}}{1+x} = 0,$$

d. h.

$$\left(\frac{f(x)}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}\right)' = 0,$$

also

$$f(x) = c(1+x)^{\frac{1}{2}}.$$

Die Konstante c ist aber gleich 1, weil für $x=0$ sowohl $f(x)$ als auch $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ gleich 1 wird. Es ist somit

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \binom{\frac{1}{2}}{1}x + \binom{\frac{1}{2}}{2}x^2 + \cdots$$
$$(-1 < x < 1)$$

Die Binomialformel gilt also auch für den Exponenten $\frac{1}{2}$, wenn $|x| < 1$, aber nicht, wenn $|x| > 1$ ist.

Jetzt sei μ eine beliebige, aber von 0, 1, 2, 3, ... verschiedene Zahl. Wir suchen eine Potenzreihe, die für $|x| < 1$ gleich $(1+x)^{\mu}$ ist. Sie hat die Form $1 + b_1x + b_2x^2 + \cdots$, und wir verlangen, daß für $|x| < 1$

$$1 + b_1x + b_2x^2 + \cdots = (1+x)^{\mu}$$

sein soll. Durch Differentiation ergibt sich*)

$$b_1 + 2b_2x + 3b_3x^2 + \cdots = \mu(1+x)^{\mu-1}.$$

Multipliziert man beiderseits mit $1+x$, so kommt

$$(1+x)(b_1 + 2b_2x + 3b_3x^2 + \cdots) = \mu(1 + b_1x + b_2x^2 + \cdots).$$

Daraus folgt

$$b_1 = \binom{\mu}{1},\ b_2 = \binom{\mu}{2},\ b_3 = \binom{\mu}{3}, \cdots$$

so daß $\frac{b_{n-1}x^{n-1}}{b_nx^n} = \frac{n}{\mu - n + 1}x$ nach $-x$ konvergiert und die Potenzreihe

$$1 + \binom{\mu}{1}x + \binom{\mu}{2}x^2 + \cdots$$

*) Vgl. die Differentiationsregel in Nr. 2 des § 33.

aber von Null verschiedene Größe verstehen und annehmen*), daß auch $|x+h|<|x_0|$. Dann ist

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=a_1\frac{(x+h)-x}{h}+a_2\frac{(x+h)^2-x^2}{h}+a_3\frac{(x+h)^3-x^3}{h}+\cdots$$

Subtrahieren wir hiervon

$$\varphi(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots,$$

so kommt:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\varphi(x)=a_2\left\{\frac{(x+h)^2-x^2}{h}-2x\right\}+a_3\left\{\frac{(x+h)^3-x^3}{h}-3x^2\right\}+\cdots$$

Nach dem Mittelwertsatz ist nun:

$$\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=n\xi_n^{n-1},$$

wobei ξ_n zwischen x und $x+h$ liegt. Es wird hiernach

$$\frac{(x+h)^n-x^n}{h}-nx^{n-1}=n(\xi_n^{n-1}-x^{n-1}).$$

Auf Grund des Mittelwertsatzes ist aber ferner

$$\xi_n^{n-1}-x^{n-1}=(\xi_n-x)(n-1)\bar{\xi}_n^{n-2},$$

wobei $\bar{\xi}_n$ zwischen x und ξ_n, also sicher zwischen x und $x+h$ liegt. Alles in allem ist also:

$$\frac{(x+h)^n-x^n}{h}-nx^{n-1}=n(n-1)\bar{\xi}_n^{n-2}(\xi_n-x),$$

mithin

$$\left|\frac{(x+h)^n-x^n}{h}-nx^{n-1}\right|<n(n-1)|x_0|^{n-2}|h|,$$

weil

$$|\bar{\xi}_n|<|x_0| \text{ und } |\xi_n-x|<|h|.$$

Jetzt können wir aber schreiben**):

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\varphi(x)\right|<|h|(2\cdot1|a_2|+3\cdot2|a_3x_0|+\cdots)$$

*) Diese Annahme ist wegen $\lim h=0$ erlaubt.

**) Bei einer absolut konvergenten Reihe ist $|u_1+u_2+\cdots|$ kleiner oder gleich $|u_1|+|u_2|+\cdots$

Daraus folgt

$$\lim_{h=0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\varphi(x)\right\}=0$$

oder

$$\lim_{h=0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\varphi(x),\ \text{also}\ \varphi(x)=f'(x).$$

Die Potenzreihe $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$ hat also im Innern ihres Konvergenzintervalls überall die Ableitung $a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots$ Man erhält sie, indem man die Reihe $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$ gliedweise differenziert.

§ 39. Anwendungen.

Berechnung der Logarithmen.

Es sei $|x|<1$. Die Funktion

$$f(x)=\log(1+x)$$

hat die Ableitung*)

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots \text{ (vgl. S. 33.)}$$

Diese Potenzreihe ist aber die Ableitung von

$$F(x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots$$

Es ist also

$$F'(x)=f'(x),\ \text{d. h.}\ (F(x)-f(x))'=0.$$

Daraus folgt (vgl. S. 58)

$$F(x)-f(x)=c$$

(c eine Konstante). Nun hat man aber $F(0)=f(0)=0$, also auch $c=0$. Mithin ist $F(x)=f(x)$, also

$$\log(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots \qquad (|x|<1)$$

In dieser Reihe dürfen wir, weil dabei $|x|<1$ bleibt, x durch $-x$ ersetzen. Wir erhalten dadurch

$$\log(1-x)=-\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots$$

*) Man denke an die Differentiation der zusammengesetzten Funktionen.

oder, da nach § 32

$$dF'(u) = F''(u)\,du$$

ist,

$$d^2y = F''(u)\,du^2 + F'(u)\,d^2u.$$

Weiter findet man

$$d^3y = F'''(u)\,du^3 + 3F''(u)\,du\,d^2u + F'(u)\,d^3u$$

usw.

Nur die erste von diesen Formeln, d. h. $dy = F'(u)\,du$, sieht so aus, als wenn u die unabhängige Veränderliche wäre. Es gibt aber einen speziellen Fall, wo sie alle so aussehen. Ist nämlich $u = \lambda x + \mu$ (λ und μ Konstanten und $\lambda \gtrless 0$), so wird $du = \lambda\,dx$, also

$$d^2u = 0,\ d^3u = 0, \ldots,$$

so daß allgemein

$$d^ny = F^{(n)}(u)\,du^n$$

wird und

$$F^{(n)}(u) = \frac{d^ny}{du^n}.$$

Im allgemeinen ist jedoch, für $n > 1$, $F^{(n)}(u)$ keineswegs gleich d^ny dividiert durch du^n.

§ 41. Beispiele.

1. Wir fanden (§ 29), daß

$$(\sin x)' = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad (\cos x)' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

ist. Mithin wird

$$(\sin x)'' = \sin\left(x + 2\,\frac{\pi}{2}\right), \quad (\cos x)'' = \cos\left(x + 2\,\frac{\pi}{2}\right)$$

und allgemein

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \quad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

2. Wir wissen, daß $(e^x)' = e^x$ ist. Folglich wird

$$(e^x)^{(n)} = e^x.$$

Die Funktion e^x hat also die Eigentümlichkeit, daß ihre sämtlichen Ableitungen ebenfalls gleich e^x sind.

3. Die Reihe

$$c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \cdots$$

konvergiere für $|x - x_0| < \varrho$. Nennen wir ihre Summe $f(x)$, so ist (vgl. § 38) im Innern von $(x_0 - \varrho, x_0 + \varrho)$

$$f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \cdots,$$
$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x - x_0) + 3c_3(x - x_0)^2 + \cdots,$$
$$f''(x) = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3(x - x_0) + 4 \cdot 3c_4(x - x_0)^2 + \cdots,$$
$$f'''(x) = 3 \cdot 2c_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2c_4(x - x_0) + 5 \cdot 4 \cdot 3c_5(x - x_0)^2 + \cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Hieraus folgt

$$c_0 = f(x_0), \quad c_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}, \quad c_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \quad c_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}, \ldots$$

Es ist also für $|x - x_0| < \varrho$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{3!} f'''(x_0) + \cdots$$

§ 42. Der Taylorsche Lehrsatz.

Von $F(x)$ mögen in (a, b) die Ableitungen

$$F'(x), F''(x), \ldots, F^{(n)}(x)$$

existieren. x_0 und x_1 seien zwei Werte in (a, b). Wir wollen uns fragen, wie genau $F(x_1)$ durch

$$F(x_0) + \frac{x_1 - x_0}{1!} F'(x_0) + \cdots + \frac{(x_1 - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} F^{(n-1)}(x_0)$$

dargestellt wird. Wir wollen uns also mit der Differenz

$$R_n = F(x_1) - F(x_0) - \frac{x_1 - x_0}{1!} F'(x_0) - \cdots - \frac{(x_1 - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} F^{(n-1)}(x_0)$$

beschäftigen. Setzen wir

$$\Phi(x) = F(x_1) - F(x) - \frac{x_1 - x}{1!} F'(x) - \cdots - \frac{(x_1 - x)^{n-1}}{(n-1)!} F^{(n-1)}(x),$$

so ist $\Phi(x_0) = R_n$ und $\Phi(x_1) = 0$. Die Funktion $\Phi(x)$ hat

auf Grund unserer Voraussetzungen in (a, b) eine Ableitung, und zwar findet man

$$\Phi'(x) = -\frac{(x_1 - x)^{n-1}}{(n-1)!} F^{(n)}(x).$$

Nun wollen wir unsern verallgemeinerten Mittelwertsatz (§ 31) auf die beiden Funktionen $\Phi(x)$ und

$$\Psi(x) = (x_1 - x)^p$$

anwenden (p eine positive ganze Zahl). Nach jenem Satze ist*)

$$\frac{\Phi(x_1) - \Phi(x_0)}{\Psi(x_1) - \Psi(x_0)} = \frac{\Phi'(\xi)}{\Psi'(\xi)},$$

d. h. es ist

$$\frac{R_n}{(x_1 - x_0)^p} = \frac{(x_1 - \xi)^{n-p}}{(n-1)!p} F^{(n)}(\xi).$$

Hieraus ergibt sich, wenn man

$$\xi = x_0 + \vartheta(x_1 - x_0)$$

setzt,

$$R_n = \frac{(x_1 - x_0)^n (1 - \vartheta)^{n-p}}{(n-1)!p} F^{(n)}(x_0 + \vartheta(x_1 - x_0));$$

ϑ liegt zwischen 0 und 1.

Wir können somit folgenden Satz aussprechen: Wenn $F(x)$ in (a, b) n-mal differenzierbar ist und x und $x + h$ in (a, b) liegen, so gilt die Formel**)

$$F(x + h) = F(x) + \frac{h}{1!} F'(x) + \frac{h^2}{2!} F''(x) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} F^{(n-1)}(x) + R_n,$$

und man hat

$$R_n = \frac{h^n (1 - \vartheta)^{n-p}}{(n-1)!p} F^{(n)}(x + \vartheta h).$$

Dabei ist p eine beliebig gewählte positive ganze Zahl und $0 < \vartheta < 1$.

Setzen wir $h = dx$, so lautet die Formel:

$$F(x + dx) = F(x) + \frac{dF(x)}{1!} + \frac{d^2F(x)}{2!} + \cdots + \frac{d^{n-1}F(x)}{(n-1)!} + R_n,$$

*) Die Bedingungen des Satzes sind alle erfüllt.

**) Man nennt sie die Taylorsche Formel.

und für R_n hat man

$$R_n = \frac{(1-\vartheta)^{n-p}}{(n-1)!p}\{d^nF(x)\}_{x+\vartheta h}. \quad (0<\vartheta<1)$$

$\{d^nF(x)\}_{x+\vartheta h}$ bedeutet, daß nach Bildung von $d^nF(x)$ für x zu setzen ist $x+\vartheta h$.

Noch kürzer schreibt sich unsere Formel, wenn wir $F(x)=y$ und $F(x+dx)-F(x)=\Delta y$ setzen. Dann nimmt sie folgende Gestalt an:

$$\Delta y = \frac{dy}{1!}+\frac{d^2y}{2!}+\cdots+\frac{d^{n-1}y}{(n-1)!}+\frac{(1-\vartheta)^{n-p}}{(n-1)!p}(d^ny)_{x+\vartheta h}.$$
$$(0<\vartheta<1)$$

Für $p=n$ haben wir

$$\Delta y = \frac{dy}{1!}+\frac{d^2y}{2!}+\cdots+\frac{d^{n-1}y}{(n-1)!}+\frac{(d^ny)_{x+\vartheta h}}{n!},$$

für $p=1$

$$\Delta y = \frac{dy}{1!}+\frac{d^2y}{2!}+\cdots+\frac{d^{n-1}y}{(n-1)!}+\frac{(1-\bar\vartheta)^{n-1}}{(n-1)!}(d^ny)_{x+\bar\vartheta h}.$$

ϑ und $\bar\vartheta$ liegen beide zwischen 0 und 1.

§ 43. Die Taylorsche Reihe.

Wenn $F(x)$ in (a, b) unbeschränkt differenzierbar ist, d. h. alle Ableitungen besitzt, und x und $x+h$ in (a, b) liegen, so kann es sein, daß in der Taylorschen Formel

$$\lim_{n=\infty} R_n = 0$$

wird. Ist dies der Fall, so haben wir (vgl. § 17)

$$F(x+h) = F(x)+\frac{h}{1!}F'(x)+\frac{h^2}{2!}F''(x)+\cdots$$

Die rechte Seite dieser Formel nennt man die Taylorsche Reihe*) der Funktion $F(x)$.

Wenn für $n=1, 2, 3, \ldots$ und für alle Werte ϑ zwischen 0 und 1

$$|F^{(n)}(x+\vartheta h)|<A$$

ist (A soll eine Konstante sein), so kann man sicher sein, daß R_n

*) Im Falle $x=0$ nennt man sie die Mac-Laurinsche Reihe.

nach Null konvergiert. In der Tat ist für $p = n$

$$R_n = \frac{h^n}{n!} F^{(n)}(x + \vartheta h),$$

also

$$|R_n| < \frac{|h|^n}{n!} A.$$

Nun wissen wir aber (§ 22), daß die Reihe

$$1 + \frac{|h|}{1!} + \frac{|h|^2}{2!} + \cdots$$

konvergent ist. Daraus folgt

$$\lim \frac{|h|^n}{n!} = 0, \quad \text{mithin auch} \quad \lim R_n = 0.$$

§ 44. Beispiele.

1. e^x liegt mit seinen Ableitungen (die, wie wir wissen, alle gleich e^x sind) zwischen e^a und e^b, wenn x dem Intervall (a, b) angehört. $\sin x$ und $\cos x$ sind mit ihren sämtlichen Ableitungen dem Betrage nach kleiner als 1. Für alle diese Funktionen gilt folglich die Formel

$$F(x + h) = F(x) + \frac{h}{1!} F'(x) + \frac{h^2}{2!} F''(x) + \cdots$$

Ersetzen wir x durch 0 und h durch x, bilden wir also die Mac-Laurinsche Reihe

$$F(x) = F(0) + \frac{x}{1!} F'(0) + \frac{x^2}{2!} F''(0) + \cdots,$$

so finden wir

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots,$$

$$\cos x = 1 \qquad - \frac{x^2}{2!} \qquad + \frac{x^4}{4!} \qquad - \cdots,$$

$$\sin x = \qquad \frac{x}{1!} \qquad - \frac{x^3}{3!} \qquad - \frac{x^5}{5!} + \cdots.$$

2. $y = \log(1 + x)$ hat für $x > -1$ alle Ableitungen. Es ist nämlich, wenn wir $1 + x = u$ setzen*),

*) Es liegt hier der Fall $u = \lambda x + \mu$ vor, den wir in § 40 besprachen.

$$dy = u^{-1}du, \quad d^2y = (-1)u^{-2}du^2,$$
$$d^3y = (-1)(-2)u^{-3}du^3, \ldots,$$

alſo wegen $du = dx$

$$\frac{dy}{dx} = u^{-1}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = (-1)u^{-2}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = (-1)(-2)u^{-3}, \ldots,$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = (-1)(-2)\cdots(-n+1)u^{-n}.$$

Für $x = 0$ wird $\log(1+x)$ null, und die Ableitungen nehmen die Werte an:

$$1, \quad -1, \quad 1\cdot 2, \quad -1\cdot 2\cdot 3, \cdots, \quad (-1)^{n-1}1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1).$$

Die Mac-Laurinſche Formel lautet alſo:

$$\log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-2}x^{n-1}}{n-1} + R_n, \qquad (x>-1)$$

und man hat

$$R_n = (-1)^{n-1}\frac{(1-\vartheta)^{n-p}x^n}{p(1+\vartheta x)^n}. \qquad (0<\vartheta<1)$$

Iſt $|x| < 1$, ſo ſetze man $p = 1$ und ſchreibe

$$R_n = \frac{(-1)^{n-1}}{1+\vartheta x}\left(\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta x}\right)^{n-1}x^n.$$

Da ϑx zwiſchen $-\vartheta$ und ϑ liegt, ſo liegt

$$\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta x} \text{ zwiſchen } \frac{1-\vartheta}{1+\vartheta} \text{ und } \frac{1-\vartheta}{1-\vartheta} = 1,$$

alſo zwiſchen 0 und 1. Außerdem iſt offenbar $1+\vartheta x \geqq 1-\vartheta|x| > 1-|x|$.

Alſo haben wir

$$R_n| < \frac{|x|^n}{1-|x|},$$

folglich $\lim R_n = 0$ und

$$\log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

Wenn $x = 1$ iſt, ſo ſetze man $p = n$. Dann wird

$$R_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{(1+\vartheta)^n},$$

also

$$|R_n| < \frac{1}{n},$$

folglich $\lim R_n = 0$ und

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots$$

Alle diese Resultate sind uns schon bekannt, und wir wissen auch, daß die Reihe $\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$ für $x = -1$ und $|x| > 1$ nicht konvergiert, so daß also die Formel

$$\log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

nur für $-1 < x \leqq 1$ gilt.

3. $y = (1+x)^\mu$ hat für $x > -1$ alle Ableitungen*). Setzen wir wieder $1 + x = u$, so ist

$$dy = \mu u^{\mu-1} du, \quad d^2y = \mu(\mu-1)u^{\mu-2}du^2, \ldots,$$

also wegen $du = dx$

$$\frac{dy}{dx} = \mu u^{\mu-1}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \mu(\mu-1)u^{\mu-2}, \ldots$$

Für $x = 0$ reduzieren sich y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ... auf

$$1, \ \mu, \ \mu(\mu-1), \ldots$$

Die Mac-Laurinsche Formel lautet also:

$$(1+x)^\mu = 1 + \binom{\mu}{1}x + \binom{\mu}{2}x^2 + \cdots + \binom{\mu}{n-1}x^{n-1} + R_n,$$

und man hat

$$R_n = \frac{n}{p}\binom{\mu}{n}(1+\vartheta x)^{\mu-n}(1-\vartheta)^{n-p}x^n. \qquad (0<\vartheta<1)$$

Wenn $|x| < 1$, so setze man $p = 1$ und schreibe

$$R_n = x(1+\vartheta x)^{\mu-1}\left(\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta x}\right)^{n-1} \cdot n\binom{\mu}{n}x^{n-1}.$$

Der dritte Faktor liegt, wie wir wissen, zwischen 0 und 1 der zweite zwischen 1 und $(1+x)^{\mu-1}$. Ist K die größte unter

*) Den trivialen Fall $\mu = 0$ schließen wir im folgenden aus.

Zahlen 1 und $(1+x)^{\mu-1}$, so haben wir

$$|R_n| < n\binom{\mu}{n}|x|^{n-1}K.$$

Nun konvergiert für $|x|<1$ die Reihe (S. 79 f.)

$$1+\binom{\mu}{1}x+\binom{\mu}{2}x^2+\cdots,$$

folglich auch die Reihe

$$\binom{\mu}{1}+2\binom{\mu}{2}x+3\binom{\mu}{3}x^2+\cdots,$$

und es ist daher

$$\lim n\binom{\mu}{n}x^{n-1}=0,$$

mithin $\lim R_n=0$, so daß wir haben:

$$(1+x)^{\mu}=1+\binom{\mu}{1}x+\binom{\mu}{2}x^2+\cdots\ (|x|<1).$$

Dieses Resultat ist uns schon bekannt (vgl. § 39).

§ 45. Maxima und Minima.

Man sagt, $f(x)$ habe an der Stelle x_0 ein Maximum*) (Minimum), wenn sich um x_0 ein Intervall $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ konstruieren läßt, so daß $f(x_0)$ der größte (kleinste) Funktionswert in diesem Intervall ist. Wir setzen voraus, daß x im Innern eines Intervalls (a, b) liegt, in welchem $f(x)$ definiert ist. Für Maxima und Minima hat man auch den gemeinsamen Namen Extrema (Pluralis von Extremum).

Wenn $f(x_0)$ ein Extremum ist und die Ableitung $f'(x_0)$ existiert, so muß $f'(x_0)=0$ sein.

Ist $|h|<\varepsilon$, so haben die Differenzen

$$f(x+h)-f(x) \text{ und } f(x-h)-f(x)$$

dasselbe Zeichen, also die Differenzenquotienten

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \text{ und } \frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$$

entgegengesetzte Zeichen. Nennen wir u den positiven, v den nega-

*) oder $f(x_0)$ sei ein Maximum (Minimum).

tiven von ihnen, dann hat man

$$\lim_{h=0} u = f'(x_0) \quad \text{und} \quad \lim_{h=0} v = f'(x_0).$$

Aus der ersten Gleichung ist zu schließen, daß $f'(x_0) \geqq 0$, aus der zweiten, daß $f'(x_0) \leqq 0$ sein muß. Folglich ist $f'(x_0) = 0$. An der Stelle $x = x_0$ ist also die Tangente der Bildkurve von $f(x)$ parallel zur x-Achse. Man sieht sofort, daß dies nur eine notwendige, aber keineswegs eine hinreichende Bedingung für das Eintreten eines Extremums ist (vgl. Fig. 13). Weiß man nur, daß $f'(x_0) = 0$ ist, so kann man noch nicht behaupten, daß $f(x_0)$ ein Maximum oder Minimum ist. In der Praxis kann man diese Behauptung gewöhnlich auf Grund des folgenden Satzes machen:

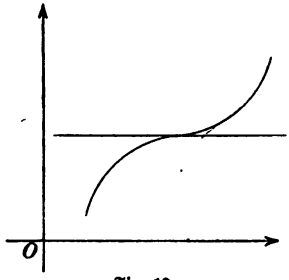


Fig. 13.

Wenn $f(x)$ im Innern von $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ überall eine Ableitung hat und diese Ableitung ist für $x < x_0$ positiv, für $x > x_0$ dagegen negativ, so ist $f(x_0)$ ein Maximum. Ist die Ableitung für $x < x_0$ negativ, für $x > x_0$ dagegen positiv, so ist $f(x_0)$ ein Minimum.

Im ersten Falle gilt nämlich folgendes: Wenn x von $x_0 - \varepsilon$ bis x_0 zunimmt, so wächst $f(x)$; nimmt aber x weiter von x_0 bis $x_0 + \varepsilon$ zu, so nimmt $f(x)$ ab. Im zweiten Falle ist es umgekehrt.

§ 46. Größter und kleinster Funktionswert in einem endlichen Intervall.

$f(x)$ sei für $a \leqq x \leqq b$ ausnahmslos stetig. Ein in (a, b) enthaltenes Intervall (α, β) wollen wir ein ausgezeichnetes Teilintervall von (a, b) nennen, wenn es in (a, b) keinen Funktionswert gibt, der die sämtlichen Funktionswerte in (α, β) übertrifft.

Wenn man (a, b) mittelst des Wertes $c = \frac{a+b}{2}$ in (a, c) und (c, b) zerlegt, so ist wenigstens eins der beiden Teilintervalle ein ausgezeichnetes. Sonst ließen sich nämlich in (a, b) x_1 und x_2 so wählen, daß

$$\text{für } a \leqq x \leqq c \qquad f(x) < f(x_1),$$
$$\text{für } c \leqq x \leqq b \qquad f(x) < f(x_2)$$

wäre. Einer der beiden Werte $f(x_1)$, $f(x_2)$ wäre alsdann größer als alle Funktionswerte in (a, b), was offenbar ein Widerspruch ist. Es gibt also in (a, b) sicher eine ausgezeichnete Hälfte (a_1, b_1), ebenso in (a_1, b_1) eine ausgezeichnete Hälfte (a_2, b_2) usw. Ist ξ der gemeinsame Grenzwert von a_n und b_n, so läßt sich zeigen, daß $f(\xi)$ von keinem Funktionswert in (a, b) übertroffen wird. Wäre z. B. $f(\xi_0) > f(\xi)$, so gäbe es

$$\text{in } (a_1, b_1) \text{ eine Stelle } \xi_1, \text{ so daß } f(\xi_1) \geqq f(\xi_0),$$
$$\text{in } (a_2, b_2) \text{ eine Stelle } \xi_2, \text{ so daß } f(\xi_2) \geqq f(\xi_1),$$
$$\text{in } (a_3, b_3) \text{ eine Stelle } \xi_3, \text{ so daß } f(\xi_3) \geqq f(\xi_2)$$

ist, usw. Da $\lim \xi_n = \xi$ ist, so hat man wegen der Stetigkeit

$$\lim f(\xi_n) = f(\xi).$$

Andrerseits ist aber $\lim f(\xi_n) \geqq f(\xi_0) > f(\xi)$.

Wenden wir dieselbe Betrachtung auf $-f(x)$ an, so gelangen wir zu einem Funktionswert $f(\bar{\xi})$, der in (a, b) der kleinste ist.

Es gilt demnach der folgende (zum ersten Mal von Weierstraß ausgesprochene) Satz:

Wenn $f(x)$ für $a \leqq x \leqq b$ ausnahmslos stetig ist, so gibt es in (a, b) eine Stelle ξ und eine Stelle $\bar{\xi}$, so daß $f(\xi)$ der größte, $f(\bar{\xi})$ der kleinste Wert ist, den $f(x)$ in (a, b) annimmt.

Liegt ξ im Innern von (a, b) und existiert dort die Ableitung $f'(x)$, so ist notwendig $f'(\xi) = 0$; denn von den Differenzenquotienten

$$\frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}, \qquad \frac{f(\xi - h) - f(\xi)}{-h} \qquad (h > 0)$$

ist der eine u größer gleich Null, der andere v kleiner gleich Null. Da bei nach Null konvergierendem h sowohl $\lim u = f'(\xi)$, als auch $\lim v = f'(\xi)$ ist, so kann $f'(\xi)$ weder positiv noch negativ sein. Wenn $\bar{\xi}$ im Innern von (a, b) liegt und dort die Ableitung $f'(x)$ existiert, so ist $f'(\bar{\xi}) = 0$.

Man kann hieraus einen neuen Beweis des Theorems von Rolle gewinnen (§ 30). Nach den dort gemachten Voraussetzungen muß nämlich wenigstens eine der beiden Stellen ξ, $\bar{\xi}$ im Innern von (a, b) liegen.

§ 47. Beispiele.

1. $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ seien gegebene Zahlen. Wir suchen x so zu bestimmen, daß

$$f(x) = (x-a_1)^2 + (x-a_2)^2 + \cdots + (x-a_n)^2$$

möglichst klein wird. Wir finden

$$f'(x) = 2(x-a_1) + 2(x-a_2) + \cdots + 2(x-a_n)$$
$$= 2n\left(x - \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right).$$

Hier ist

$$\text{für } x < \frac{a_1+a_2+\cdots a_n}{n} \qquad f'(x) < 0,$$

dagegen

$$\text{für } x > \frac{a_1+a_2+\cdots a_n}{n} \qquad f'(x) > 0.$$

Daraus sehen wir, daß die Funktion $f(x)$ an der Stelle

$$x = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

ein Minimum und zugleich ihren kleinsten Wert hat.

2. Ein zylindrisches (oben offenes) Gefäß zu konstruieren, welches bei gegebener Oberfläche einen möglichst großen Inhalt hat.

r sei der Grundradius und h die Höhe des Gefäßes. Dann ist die Oberfläche

$$\pi r^2 + 2\pi r h = S,$$

der Inhalt

$$\pi r^2 h = V.$$

Da aus der ersten Gleichung

$$\pi r h = \frac{S - \pi r^2}{2}$$

folgt, so wird

$$V = \frac{Sr - \pi r^3}{2}.$$

Die Veränderliche r ist, wie die Gleichung für S lehrt, auf das Intervall $\left(0, \sqrt{\frac{S}{\pi}}\right)$ beschränkt.

$$\frac{dV}{dr} = \frac{S - 3\pi r^2}{2}$$

ist positiv für $0 < r < \sqrt{\frac{S}{3\pi}}$ und negativ für $\sqrt{\frac{S}{3\pi}} < r < \sqrt{\frac{S}{\pi}}$. Die Funktion V hat also für $r = \sqrt{\frac{S}{3\pi}}$ ein Maximum und zugleich ihren größten Wert. Berechnet man h, so findet man $h = \sqrt{\frac{S}{3\pi}}$. Es ist also $h = r$. Das Gefäß muß so beschaffen sein, daß die Höhe gleich dem Grundradius ist.

§ 48. Differentiation von Funktionen mehrerer Veränderlicher.

Wir beschränken uns auf den Fall von zwei unabhängigen Veränderlichen x, y, die wir als Abszisse und Ordinate eines Punktes in Bezug auf ein rechtwinkliges Achsenpaar deuten wollen.

Wenn es sich um eine Funktion $z = f(x, y)$ handelt, so braucht sie nicht für alle Wertsysteme (x, y) definiert zu sein, sondern nur für eine gewisse Mannigfaltigkeit solcher Wertsysteme oder, geometrisch gesprochen, in einer gewissen Punktmenge (vgl. S. 10). Diese Punktmenge kann z. B. aus allen Punkten eines Rechtecks bestehen, dessen Seiten parallel zu den Koordinatenachsen sind; x und y sind dann den Bedingungen

$$a \leqq x \leqq b, \quad c \leqq y \leqq d$$

unterworfen. Eine solche Punktmenge wollen wir als ein (zweidimensionales) Intervall bezeichnen und dafür $(a, b; c, d)$ schreiben.

Wir nehmen jetzt an, daß $f(x, y)$ in dem Intervall $(a, b; c, d)$ definiert ist.*) Dann ist, wenn $c \leqq y_0 \leqq d$,

$$\varphi(x) = f(x, y_0)$$

in dem Intervall (a, b) eine Funktion von x und

$$\psi(y) = f(x_0, y),$$

wenn $a \leqq x_0 \leqq b$, in dem Intervall (c, d) eine Funktion von y. Existieren nun $\varphi'(x_0)$, $\psi'(y_0)$, so nennt man $\varphi'(x_0)$ die Ableitung von $f(x, y)$ nach x und $\psi'(y_0)$ die Ableitung von $f(x, y)$ nach y an der Stelle (x_0, y_0). Beide heißen die partiellen Ableitungen von $f(x, y)$ an der Stelle (x_0, y_0)

*) Damit ist nicht ausgeschlossen, daß $f(x, y)$ auch noch für andere Punkte definiert ist.

und ihre Berechnung die partielle Differentiation. Man hat für $\varphi'(x_0)$ die Bezeichnung $f'_x(x_0, y_0)$, für $\psi'(y_0)$ die Bezeichnung $f'_y(x_0, y_0)$.

Existieren $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ in dem Intervall $(a, b; c, d)$, so kann es sein, daß sie sich an der Stelle (x_0, y_0) wiederum nach x und y differenzieren lassen. Die Ableitungen von $f'_x(x, y)$ nach x und y an der Stelle (x_0, y_0) bezeichnet man mit

$$f''_{xx}(x_0, y_0) \text{ bzw. } f''_{xy}(x_0, y_0),$$

die Ableitungen von $f'_y(x, y)$ nach x und y an der Stelle (x_0, y_0) mit

$$f''_{yx}(x_0, y_0) \text{ bzw. } f''_{yy}(x_0, y_0).$$

Diese vier Größen nennt man die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von $f(x, y)$ an der Stelle (x_0, y_0). In ähnlicher Weise werden die partiellen Ableitungen dritter und höherer Ordnung definiert und bezeichnet. Es gibt, wie man sieht 2^n partielle Ableitungen n-ter Ordnung. Für gewöhnlich reduziert sich aber ihre Zahl auf $n + 1$, was man mit Hilfe des folgenden Satzes nachweisen kann:

Wenn in dem Intervall $(a, b; c, d)$ f''_{xy} und f''_{yx} existieren*) und an der Stelle (x_0, y_0) in $(a, b; c, d)$ stetig sind, so ist

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

Die Stetigkeit einer Funktion von zwei Veränderlichen wird ganz ähnlich definiert wie die einer Funktion von einer Veränderlichen. $F(x, y)$ heißt an der Stelle (x, y) stetig, wenn aus $\lim x_n = x$, $\lim y_n = y$ immer folgt $\lim F(x_n, y_n) = F(x, y)$; dabei müssen alle Punkte (x_n, y_n) sowie auch der Punkt (x, y) der Punktmenge angehören, in der $F(x, y)$ definiert ist.

Um nun den obigen Satz zu beweisen, betrachten wir den Ausdruck

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0);$$

$(x_0 + h, y_0 + k)$ soll wie (x_0, y_0) in $(a, b; c, d)$ liegen. Setzen wir

$$f_1(x) = f(x, y_0 + k) - f(x, y_0).$$

und

$$f_2(y) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y),$$

*) Natürlich müssen dann auch f'_x und f'_y existieren.

so wird der obige Ausdruck gleich

$$f_1(x_0 + h) - f_1(x_0) = hf_1'(x_0 + \vartheta_1 h)$$

und auch gleich

$$f_2(y_0 + k) - f_2(y_0) = kf_2'(y_0 + \vartheta_2 k);$$

ϑ_1 und ϑ_2 liegen zwischen 0 und 1*).

Man hat aber

$$f_1'(x_0 + \vartheta_1 h) = f_x'(x_0 + \vartheta_1 h, y_0 + k) - f_x'(x_0 + \vartheta_1 h, y_0)$$
$$= kf_{xy}''(x_0 + \vartheta_1 h, y_0 + \bar{\vartheta}_1 k)$$

und

$$f_2'(y_0 + \vartheta_2 k) = f_y'(x_0 + h, y_0 + \vartheta_2 k) - f_y'(x_0, y_0 + \vartheta_2 k)$$
$$= hf_{yx}''(x_0 + \bar{\vartheta}_2 h, y_0 + \vartheta_2 k);$$

$\bar{\vartheta}_1$ und $\bar{\vartheta}_2$ liegen wieder zwischen 0 und 1**).

Wir wissen also, daß

$$f_{xy}''(x_0 + \vartheta_1 h, y_0 + \bar{\vartheta}_1 k) = f_{yx}''(x_0 + \bar{\vartheta}_2 h, y_0 + \vartheta_2 k)$$

ist. Lassen wir h und k nach Null konvergieren, so konvergieren die beiden Seiten der Gleichung nach $f_{xy}''(x_0, y_0)$ und $f_{yx}''(x_0, y_0)$, so daß $f_{xy}''(x_0, y_0) = f_{yx}''(x_0, y_0)$ sein muß.

Differentiale von $f(x, y)$.

Wenn $f(x, y)$ in einem Intervall definiert ist und an der Stelle (x, y) in demselben die partiellen Ableitungen f_x', f_y' existieren, so nennt man den Ausdruck

$$f_x'(xy)h + f_y'(x, y)k$$

das Differential von $f(x, y)$ an der Stelle (x, y) und bezeichnet es mit $df(x, y)$. h und k sind zwei Größen, die von x, y gänzlich unabhängig sind. Setzt man in der Formel

$$df(x, y) = f_x'h + f_y'k$$

$f = x$ und $f = y$, so ergibt sich

$$dx = h, \quad dy = k.$$

*) Die Bedingungen des Mittelwertsatzes sind auf Grund unserer Voraussetzungen erfüllt.

**) Auch hier sind die Bedingungen des Mittelwertsatzes erfüllt.

Wir können also h und k als die Differentiale von x und y betrachten und schreiben

$$df(x, y) = f'_x dx + f'_y dy.$$

Das Differential von $df(x, y)$ bezeichnet man mit $d^2 f(x, y)$, das Differential hiervon mit $d^3 f(x, y)$ usw. Man hat*)

$$d^2 f(x, y) = df'_x dx + df'_y dy$$
$$= f''_{xx} dx^2 + f''_{xy} dx\, dy + f''_{yx} dx\, dy + f''_{yy} dy^2$$

oder, wenn $f''_{xy} = f''_{yx}$ ist,

$$d^2 f(x, y) = f''_{xx} dx^2 + 2 f''_{xy} dx\, dy + f''_{yy} dy^2.$$

In ähnlicher Weise berechnet man $d^3 f(x, y)$, $d^4 f(x, y)$ usw.

§ 49. Differentiation zusammengesetzter Funktionen.

$F(u, v)$ sei eine Funktion von u, v in dem Intervall $(\alpha, \beta; \gamma, \delta)$, $f(x, y)$ und $g(x, y)$ Funktionen von x, y in dem Intervall $(a, b; c, d)$; außerdem seien $f(x, y)$ und $g(x, y)$ so beschaffen, daß immer

$$\alpha \leqq f(x, y) \leqq \beta \text{ und } \gamma \leqq g(x, y) \leqq \delta$$

ist. Setzt man dann

$$u = f(x, y),\ v = g(x, y)$$

und

$$z = F(u, v),$$

so ist z durch Vermittelung von u und v eine Funktion von x und y, und zwar wird

$$z = F(f(x, y), g(x, y)).$$

Wir wollen das Differential dz berechnen. Vorausgesetzt wird, daß in $(a, b; c, d)$ f'_x, f'_y, g'_x, g'_y existieren, und in $(\alpha, \beta; \gamma, \delta)$ F'_u, F'_v. Von F'_u, F'_v fordern wir ferner, daß sie in $(\alpha, \beta; \gamma, \delta)$ stetig sind.

$\Delta_x \varphi (\Delta_y \varphi)$ sei der Zuwachs, den eine Funktion φ erfährt, wenn man x durch $x + \Delta x$ (y durch $y + \Delta y$) ersetzt**). Dann ist

$$\Delta_x z = F(u + \Delta_x u, v + \Delta_x v) - F(u, v)$$
$$= F(u + \Delta_x u, v + \Delta_x v) - F(u, v + \Delta_x v)$$
$$+ F(u, v + \Delta_x v) - F(u, v),$$

*) dx und dy sind als Konstanten anzusehen.

**) (x, y) und $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ mögen beide in $(a, b; c, d)$ liegen.

also nach dem Mittelwertsatz

$$\Delta_x z = F'_u(u + \vartheta \Delta_x u,\ v + \Delta_x v)\,\Delta_x u + F'_v(u, v + \bar{\vartheta} \Delta_x v)\,\Delta_x v,$$

folglich

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = F'_u(u + \vartheta \Delta_x u,\ v + \Delta_x v)\,\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + F'_v(u, v + \bar{\vartheta} \Delta_x v)\,\frac{\Delta_x v}{\Delta x}.$$

Lassen wir Δx nach Null konvergieren, so wird

$$\lim \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = u'_x,\ \lim \frac{\Delta_x v}{\Delta x} = v'_x$$

also

$$\lim \Delta_x u = 0,\ \lim \Delta_x v = 0.$$

Man hat daher, weil F'_u und F'_v an der Stelle (u, v) stetig sind,

$$\lim F'_u(u + \vartheta \Delta_x u, v + \Delta_x v) = F'_u(u, v),$$
$$\lim F'_v(u, v + \bar{\vartheta} \Delta_x v) = F'_v(u, v)$$

und

$$z'_x = \lim \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = F'_u u'_x + F'_v v'_x.$$

Ebenso findet man

$$z'_y = \lim \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = F'_u u'_y + F'_v v'_y.$$

Es ist somit

$$dz = z'_x dx + z'_y dy = F'_u du + F'_v dv.$$

Genau ebenso würde das Differential dz aussehen, wenn u und v die unabhängigen Veränderlichen wären.

Wenn die zweiten Ableitungen von u und v in $(a, b;\ c, d)$ existieren und die zweiten Ableitungen von $F(u, v)$ in $(\alpha, \beta;\ \gamma, \delta)$ stetig sind, so hat man*)

$$d^2 z = dF'_u du + dF'_v dv + F'_u d^2 u + F'_v d^2 v,$$

also

$$d^2 z = F''_{uu} du^2 + 2 F''_{uv} du\, dv + F''_{vv} dv^2 + F'_u d^2 u + F'_v d^2 v.$$

*) Wir benutzen hier, daß $d(uv) = u\,dv + v\,du$ ist. Das ergibt sich aus der allgemeinen Formel für dz, wenn wir $F(u, v) = uv$ setzen.

Die Ausdrücke für d^3z, d^4z, ... lassen sich auch leicht erhalten. Jedenfalls sehen die Formeln für d^2z, d^3z, ... anders aus, als wenn u und v die unabhängigen Veränderlichen sind. Aber wenn u und v von der Form $\lambda x + \mu y + \nu$ (λ, μ, ν Konstanten) sind, sehen sie ebenso aus, weil dann $d^2u = d^3u = \cdots = 0$ und $d^2v = d^3v = \cdots = 0$ ist.

Drittes Kapitel.

Integralrechnung.

§ 50. Das unbestimmte Integral.

Wenn $F(x)$ für $a \leqq x \leqq b$ die Ableitung $f(x)$, also das Differential $f(x)dx$ hat, so nennt man $F(x)$ ein Integral von $f(x)$ oder von $f(x)dx$ in dem Intervall (a, b) und schreibt

$$F(x) = \int f(x)dx$$

($F(x)$ gleich Integral $f(x)dx$)*). Diese Formel ist also völlig gleichbedeutend mit

$$dF(x) = f(x)dx.$$

Ist $F_0(x)$ ein Integral von $f(x)dx$ in (a, b) und $F(x)$ ebenfalls ein solches Integral, so hat man

$$dF_0(x) = f(x)dx, \quad dF(x) = f(x)dx,$$

also

$$d(F(x) - F_0(x)) = 0.$$

$F(x) - F_0(x)$ hat demnach (vgl. S. 58) für $a \leqq x \leqq b$ einen konstanten Wert C, d. h. es ist

$$F(x) = F_0(x) + C.$$

Umgekehrt ist $F_0(x) + C$, was auch die Konstante C sein mag, immer ein Integral von $f(x)dx$, weil

$$d(F_0(x) + C) = dF_0(x) = f(x)dx$$

ist.

---

*) Wenn $F(x)$ nur im Innern von (a, b) die Ableitung $f(x)$ hat, so sagen wir, $F(x)$ sei innerhalb (a, b) ein Integral von $f(x)$.

$F_0(x) + C$ nennt man, weil darin die unbestimmte Konstante C auftritt, **das unbestimmte Integral von** $f(x)dx$. Jedes Integral von $f(x)dx$ läßt sich aus dem unbestimmten Integral durch Spezialisierung der Konstanten C, der sogenannten **Integrationskonstanten**, erhalten.

Eine Funktion $f(x)$ **integrieren** heißt ihr unbestimmtes Integral finden.

§ 51. Beispiele.

1. Ist ϱ der Konvergenzradius der Potenzreihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

und setzt man

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \cdots \qquad (|x| < \varrho)$$

so wird innerhalb $(-\varrho, \varrho)$

$$\int f(x)\, dx = C + a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \frac{a_2 x^3}{3} + \cdots$$

Nach § 38 hat nämlich die Reihe

$$C + a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \frac{a_2 x^3}{3} + \cdots$$

auch den Konvergenzradius ϱ und für $|x| < \varrho$ die Ableitung $f(x)$.

Insbesondere wird

$$\int (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)\, dx$$
$$= C + a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \ldots + \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}.$$

Das Integral einer **ganzen rationalen Funktion** n-ten Grades ist also eine ganze rationale Funktion $(n+1)$-ten Grades.

2. Das Integral einer rationalen Funktion ist keineswegs immer wieder eine rationale Funktion. Für $n = -2, -3, \ldots$ ist in jedem Intervall, welches die Null nicht enthält,

$$d\frac{x^{n+1}}{n+1} = x^n\, dx,$$

also

$$\int x^n\, dx = C + \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Dagegen ist für $x > 0$

$$\int \frac{dx}{x} = C + \log x,$$

weil $d \log x = \frac{dx}{x}$, und für $x < 0$

$$\int \frac{dx}{x} = C + \log(-x),$$

weil $d \log(-x) = \frac{d(-x)}{-x} = \frac{dx}{x}$. Ferner ergibt sich aus $d \operatorname{arc\,tg} x = \frac{dx}{1+x^2}$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = C + \operatorname{arc\,tg} x.$$

Aus $d \arcsin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ folgt

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = C + \arcsin x. \qquad (-1 < x < 1)$$

Ebenso folgt aus

$$d \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

daß

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = C + \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

ist.

3. Wenn $x > 0$ und $n + 1 \gtrless 0$*), so hat man

$$d \frac{x^{n+1}}{n+1} = x^n \, dx.$$

Also ist für $x > 0$ und $n + 1 \gtrless 0$

$$\int x^n dx = C + \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Z. B. ist für $x > 0$

$$\int x^{-\frac{1}{2}} dx = C + 2 x^{\frac{1}{2}}$$

*) Den Fall, wo n eine positive oder negative ganze Zahl ist, haben wir schon erledigt.

oder

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = C + 2\sqrt{x} .$$

4. Da

$$d\frac{a^x}{\log a} = a^x\, dx$$

so hat man

$$\int a^x\, dx = C + \frac{a^x}{\log a} .$$

Insbesondere ist

$$\int e^x\, dx = C + e^x .$$

5. Aus

$$d(-\cos x) = \sin x\, dx, \quad d\sin x = \cos x\, dx$$

folgt

$$\int \sin x\, dx = C - \cos x, \quad \int \cos x\, dx = C + \sin x .$$

Aus

$$d\,\mathrm{tg}\, x = \frac{dx}{\cos^2 x}, \quad d(-\cot x) = \frac{dx}{\sin^2 x}$$

ergibt sich

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = C + \mathrm{tg}\, x, \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = C - \cot x ;$$

im ersten Falle ist x auf ein Intervall zu beschränken, in welchem $\cos x$ nicht null ist, im zweiten Falle auf ein Intervall, in welchem $\sin x$ nicht null ist.

$f(x)$ sei in dem Intervall (a, b) überall positiv und habe die Ableitung $f'(x)$. Dann ist (nach § 33)

$$d \log f(x) = \frac{f'(x)\, dx}{f(x)} ,$$

also

$$\int \frac{f'(x)\, dx}{f(x)} = C + \log f(x) ;$$

z. B. hat man, wenn $\sin x$ in (a, b) nirgends null ist,

$$\int \frac{\cos x\, dx}{\sin x} = C + \log \sin x ,$$

ebenso, wenn $\cos x$ in (a, b) nirgends null ist,

$$\int \frac{\sin x\, dx}{\cos x} = C - \log \cos x .$$

§ 52. Hilfsmittel zur Vereinfachung von Integralen.

1. $$\int c f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx\,,$$

in Worten: eine Konstante darf man vor das Integralzeichen ziehen. Beweis:

$$d(cf(x)) = c\,df(x).$$

2. $$\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx,$$

in Worten: das Integral einer Summe ist gleich der Summe der Integrale der Summanden. Beweis:

$$d(f(x)+g(x)) = df(x) + dg(x).$$

Der Satz gilt für eine beliebige endliche Anzahl von Summanden.

3. Wenn $f(x)$ und $g(x)$ innerhalb (a, b) die Ableitungen $f'(x)$ und $g'(x)$ haben, so ist

$$f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

eine Funktion mit der Ableitung

$$(fg)' - gf' = fg'\,,$$

also ein Integral von $f(x)g'(x)dx$. Wir haben demnach

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx.$$

Das ist die Regel der partiellen Integration. Sie führt das Integral $\int f(x)g'(x)dx$ auf das (unter Umständen einfachere) Integral $\int g(x)f'(x)dx$ zurück.

4. $F(u)$ habe für $\alpha \leqq u \leqq \beta$ die Ableitung $F'(u) = \varphi(u)$, $f(x)$ für $a \leqq x \leqq b$ die Ableitung $f'(x)$, und $f(x)$ liege beständig in (α, β). Nach § 32 hat dann $F(f(x))$ das Differential

$$\varphi(f(x))f'(x)dx.$$

Andererseits aber hat $F(u)$ das Differential

$$\varphi(u)du.$$

Mithin ist vermöge $u = f(x)$

$$\int \varphi(u)du = \int \varphi(f(x))f'(x)\,dx.$$

Diese Formel zeigt, wie man in das Integral $\int \varphi(u)du$ eine neue

Veränderliche einführt. Man ersetzt u durch $f(x)$ und du durch durch $f'(x)\,dx$.

§ 53. Beispiele.

1. $\int \frac{dx}{\sin x}$ zu berechnen; x bewege sich in einem Intervall, in welchem $\sin x$ nirgends verschwindet. Man hat

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x\,dx}{\sin^2 x} = \int \frac{\sin x\,dx}{1-\cos^2 x}.$$

Nun ist aber

$$\frac{1}{1-\cos^2 x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\cos x} + \frac{1}{1+\cos x}\right),$$

also

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{2}\int \frac{\sin x\,dx}{1-\cos x} + \frac{1}{2}\int \frac{\sin x\,dx}{1+\cos x}$$
$$= \frac{1}{2}\log(1-\cos x) - \frac{1}{2}\log(1+\cos x)$$

oder wegen

$$1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2},\quad 1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$$

schließlich

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \log \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

2. Durch partielle Integration findet man

$$\int e^{-x} x\,dx = -e^{-x}x + \int e^{-x}\,dx,$$
$$\int e^{-x} x^2\,dx = -e^{-x}x^2 + 2\int e^{-x} x\,dx,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\int e^{-x} x^n\,dx = -e^{-x}x^n + n\int e^{-x} x^{n-1}\,dx,$$

so daß

$$\int e^{-x} x^n\,dx = -e^{-x}(x^n + n x^{n-1}$$
$$+ n(n-1)x^{n-2} + \cdots + n!) + C$$

ist, oder wenn wir $x^n = f(x)$ setzen

$$\int e^{-x} f(x)\,dx = -e^{-x}(f(x) + f'(x) + \cdots + f^{(n)}(x)) + C.$$

Diese Formel gilt auch, wenn $f(x)$ eine beliebige ganze rationale Funktion n-ten Grades ist.

3. Um das Integral $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$ zu berechnen ($-1<x<1$) setze man $x=\cos\varphi$, $0<\varphi<\pi$. Dann wird

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}} = \frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi},$$

$$dx = -\sin\varphi\,d\varphi.$$

und

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx = \int (\cos\varphi - 1)\,d\varphi = C - \varphi + \sin\varphi$$

$$= C - \arccos x + \sqrt{1-x^2}.$$

§ 54. Existenz des Integrals einer stetigen Funktion.

$f(x)$ sei für $a \leqq x \leqq b$ ausnahmslos stetig. Wenn (α, β) ein beliebiges in (a, b) enthaltenes Intervall ist, so wollen wir mit $M(\alpha, \beta)$ den größten, mit $m(\alpha, \beta)$ den kleinsten in (α, β) vorkommenden Funktionswert bezeichnen. Das Produkt $(\beta - \alpha)$ mal $M(\alpha, \beta)$ wollen wir $R(\alpha, \beta)$ nennen.

Ist $\alpha < \gamma < \beta$, so hat man

$$R(\alpha, \beta) \geqq R(\alpha, \gamma) + R(\gamma, \beta),$$

weil $M(\alpha, \beta) \geqq M(\alpha, \gamma)$ und $M(\alpha, \beta) \geqq M(\gamma, \beta)$.

Wir wollen jetzt (a, b) in die Teilintervalle

$$(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{p-1}, b)$$

zerlegen ($a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{p-1} < b$) und diese Zerlegung mit mit $\mathfrak{Z}$ bezeichnen. Die Summe

$$R(a, x_1) + R(x_1, x_2) + \ldots + R(x_{p-1}, b)$$

nennen wir

$$S_a^b(\mathfrak{Z}),$$

um ihre Abhängigkeit von (a, b) und $\mathfrak{Z}$ hervorzuheben.

Der Leser möge in Worten ausdrücken, was $S_a^b(\mathfrak{Z})$ bedeutet.

Die Zerlegung $\bar{\mathfrak{Z}}$ gehe aus $\mathfrak{Z}$ dadurch hervor, daß man eins der Teilintervalle, etwa (α, β), in zwei Teile (α, γ) und (γ, β)

zerlegt. Um $S_a^b(\overline{\mathfrak{Z}})$ zu erhalten, muß man in $S_a^b(\mathfrak{Z})$ das Glied

$$R(\alpha, \beta) \text{ durch } R(\alpha, \gamma) + R(\gamma, \beta)$$

ersetzen. Wir dürfen daher sicher sein, daß

$$S_a^b(\mathfrak{Z}) \geqq S_a^b(\overline{\mathfrak{Z}})$$

ist. $S_a^b(\mathfrak{Z})$ vergrößert sich also nicht, wenn man eins der Teilintervalle in zwei Teile zerlegt. Wendet man diese Bemerkung mehrmals an, so erkennt man, daß $S_a^b(\mathfrak{Z})$ sich nicht vergrößert, wenn man von $\mathfrak{Z}$ durch Weiterteilung (d h. durch Hinzufügen neuer Teilpunkte zu den alten) zu einer neuen Zerlegung übergeht.

$\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3, \ldots$ sei eine Folge von Zerlegungen des Intervalls (a, b), δ_n sei die Maximallänge der Teilintervalle von $\mathfrak{Z}_n$ (so daß keins größer als δ_n und wenigstens eins gleich δ_n ist). Wir wollen nur solche Folgen von Zerlegungen betrachten, wo jedes $\mathfrak{Z}_{n+1}$ aus $\mathfrak{Z}_n$ durch Weiterteilung entsteht und wo außerdem $\lim \delta_n = 0$ ist. Derartige Folgen nennen wir ausgezeichnete.

Ist nun $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3, \ldots$ eine ausgezeichnete Folge von Zerlegungen des Intervalls (a, b), so hat man sicher

$$S_a^b(\mathfrak{Z}_1) \geqq S_a^b(\mathfrak{Z}_2) \geqq S_{a_i}^b(\mathfrak{Z}_3) \geqq \cdots$$

Für jede Zerlegung $\mathfrak{Z}$ ist aber*)

$$(b - a)m(a, b) \leqq S_a^b(\mathfrak{Z}) \leqq (b - a)M(a, b).$$

Die Folge

$$S_a^b(\mathfrak{Z}_1), S_a^b(\mathfrak{Z}_2), S_a^b(\mathfrak{Z}_3), \ldots$$

ist also absteigend und liegt in einem endlichen Intervall, so daß (nach § 15)

$$\lim S_a^b(\mathfrak{Z}_n)$$

existiert. Wir wollen diesen Grenzwert mit S_a^b bezeichnen.

Jetzt sei $\overline{\mathfrak{Z}}_1, \overline{\mathfrak{Z}}_2, \overline{\mathfrak{Z}}_3, \ldots$ irgend eine andere ausgezeichnete Folge von Zerlegungen des Intervalls (a, b) und

$$\lim S_a^b(\overline{\mathfrak{Z}}_n) = \overline{S}_a^b.$$

---

*) Jedes Glied $(\beta - \alpha)M(\alpha, \beta)$ in $S_a^b(\mathfrak{Z})$ ist nämlich größer oder gleich $(\beta - \alpha)m(a, b)$ und kleiner oder gleich $(\beta - \alpha)M(a, b)$.

Greifen wir aus der Folge

$$S_a^b(\bar{\mathfrak{Z}}_1),\ S_a^b(\bar{\mathfrak{Z}}_2),\ S_a^b(\bar{\mathfrak{Z}}_3)\ \ldots,$$

ein Glied $S_a^b(\bar{\mathfrak{Z}})$ heraus und nehmen wir an, daß $\bar{\mathfrak{Z}}$ p Teilintervalle aufweist. Die Teilintervalle von $\mathfrak{Z}_n$ zerfallen dann in Bezug auf $\bar{\mathfrak{Z}}$ in zwei Klassen:

1. solche, die in einem der Teilintervalle von $\bar{\mathfrak{Z}}$ liegen,

2. solche, die wenigstens einen der Teilpunkte von $\bar{\mathfrak{Z}}$ in ihrem Innern enthalten.

Offenbar kann es nicht mehr als $p-1$ Teilintervalle zweiter Klasse geben.

Die Glieder $R(\alpha, \beta)$ von $S_a^b(\mathfrak{Z}_n)$ nennen wir Glieder erster oder zweiter Klasse, je nachdem (α, β) zur ersten oder zweiten Klasse gehört. Die Glieder zweiter Klasse geben eine Summe, die kleiner oder gleich

$$(p-1)\delta_n M(a, b)$$

ist (δ_n die Maximallänge der Teilintervalle von $\mathfrak{Z}_n$). Die Glieder erster Klasse sind zusammen nicht größer als $S_a^b(\bar{\mathfrak{Z}})$. Es ist daher

$$S_a^b(\mathfrak{Z}_n) \leqq S_a^b(\bar{\mathfrak{Z}}) + (p-1)\delta_n M(a, b),$$

also wegen $\lim \delta_n = 0$

$$S_a^b \leqq S_a^b(\bar{\mathfrak{Z}}),\ \text{folglich auch}\ S_a^b \leqq \bar{S}_a^b.$$

Genau ebenso ergibt sich

$$\bar{S}_a^b \leqq S_a^b.$$

Wir können also schließen, daß

$$S_a^b = \bar{S}_a^b$$

ist.

$S_a^b(\mathfrak{Z})$ konvergiert also immer nach demselben Grenzwert S_a^b, wenn $\mathfrak{Z}$ irgend eine ausgezeichnete Folge von Zerlegungen des Intervalls (a, b) durchläuft.

Wir wissen, daß $S_a^b(\mathfrak{Z})$ immer größer oder gleich $(b-a)m(a, b)$ und kleiner oder gleich $(b-a)M(a, b)$ ist. Dasselbe gilt folglich auch von S_a^b und da die Funktion $(b-a)f(x)$ stetig ist, so gibt es

(vgl. § 30) in (a, b) eine Stelle ξ, so daß

$$S_a^b = (b - a) f(\xi).$$

Wenn $a < c < b$ ist, so hat man

$$S_a^b = S_a^c + S_c^b.$$

Um dies zu beweisen, braucht man nur eine ausgezeichnete Folge $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3, \ldots$ zu betrachten, in der $\mathfrak{Z}_1$ die Zerlegung von (a, b) in (a, c) und (c, b) ist. $S_a^b(\mathfrak{Z}_n)$ spaltet sich dann in zwei Bestandteile, von denen einer nach S_a^c, der andere nach S_c^b konvergiert.

Machen wir die Festsetzung, daß immer

$$S_\beta^\alpha = -S_\alpha^\beta$$

sein soll, so gilt, wie man auch x_1, x_2, x_3 in (a, b) wählen mag, immer die Formel

$$(*) \qquad S_{x_1}^{x_2} + S_{x_2}^{x_3} + S_{x_3}^{x_1} = 0.$$

Ebenso ist immer, wie auch x und $x + h$ in (a, b) liegen mögen,

$$(**) \qquad S_x^{x+h} = h f(x + \vartheta h). \qquad (0 \leqq \vartheta \leqq 1)$$

Jetzt wollen wir die Funktion

$$F(x) = S_a^x$$

betrachten und von ihr zeigen, daß sie in (a, b) überall die Ableitung $f(x)$ hat. Damit haben wir dann die Existenz eines Integrals von $f(x)$ bewiesen.

Nach Formel $(*)$ ist, wenn die beiden Werte x und $x + h$ in (a, b) liegen,

$$F(x + h) - F(x) = S_a^{x+h} - S_a^x = S_x^{x+h},$$

also nach $(**)$

$$F(x + h) - F(x) = h f(x + \vartheta h)$$

und daher (wegen der Stetigkeit von $f(x)$)

$$\lim_{h=0} \frac{F(x + h) - F(x)}{h} = \lim_{h=0} f(x + \vartheta h) = f(x),$$

d. h.

$$F'(x) = f(x) \quad \text{oder} \quad dF(x) = f(x)\,dx.$$

Man schreibt für S_a^x

$$\int_a^x f(x)dx$$

und liest dieses Symbol so:

„Integral $f(x)dx$ von a bis x."

Im Gegensatz zu dem unbestimmten Integral nennt man $\int_a^x f(x)dx$ ein bestimmtes Integral. Es ist unter den unendlich vielen Integralen von $f(x)$ dasjenige, welches für $x = a$ den Wert 0 hat.

Ist $\Phi(x)$ irgend ein Integral von $f(x)$, so können, wie wir wissen, $\Phi(x)$ und $\int_a^x f(x)dx$ nur um eine Konstante C differieren. Es ist also

$$\int_a^x f(x)dx = \Phi(x) + C.$$

Setzt man $x = a$, so geht diese Gleichung über in

$$0 = \Phi(a) + C, \quad \text{so daß} \quad C = -\Phi(a)$$

ist und

$$(***) \qquad \int_a^x f(x)dx = \Phi(x) - \Phi(a).$$

Die rechte Seite dieser wichtigen Formel pflegt man mit

$$\big(\Phi(x)\big)_a^x$$

zu bezeichnen.

Wendet man die obigen Betrachtungen auf die Funktion $-f(x)$ an, so tritt an die Stelle von $R(a, \beta)$ der Ausdruck

$$-r(\alpha, \beta) = -(\beta - \alpha)m(\alpha, \beta),$$

wobei $m(\alpha, \beta)$ der kleinste Wert von $f(x)$ in (α, β) ist, und an die Stelle von $S_a^b(\mathfrak{Z})$ der Ausdruck

$$-s_a^b(\mathfrak{Z}) = -\{r(a, x_1) + r(x_1, x_2) + \cdots + r(x_{p-1}, b)\}.$$

Lassen wir $\mathfrak{Z}$ eine ausgezeichnete Folge von Zerlegungen des Inter-

falls (a, b) durchlaufen, so konvergiert

$$-s_a^b(\mathfrak{Z}) \quad \text{absteigend nach} \quad \int_a^b (-f(x))\,dx,$$

also

$$s_a^b(\mathfrak{Z}) \quad \text{aufsteigend nach} \quad -\int_a^b (-f(x))\,dx.$$

Da nun

$$-\int_a^x (-f(x))\,dx$$

die Ableitung $f(x)$ hat und für $x = a$ verschwindet, so ist nach Formel (***):

$$\int_a^x f(x)\,dx = -\int_a^x (-f(x))\,dx,$$

folglich

$$-\int_a^b (-f(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Wir sehen hieraus, daß

$$s_a^b(\mathfrak{Z}) \quad \text{aufsteigend nach} \quad \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{konvergiert,}$$

wenn $\mathfrak{Z}$ eine ausgezeichnete Folge von Zerlegungen des Intervalls (a, b) durchläuft. Da $S_a^b(\mathfrak{Z})$ demselben Grenzwert absteigend zustrebt, so ist immer

$$s_a^b(\mathfrak{Z}) \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq S_a^b(\mathfrak{Z}).$$

§ 55. Einführung einer neuen Veränderlichen in ein bestimmtes Integral.

$f(x)$ habe in (a, b) eine stetige Ableitung $f'(x)$ und es sei $\alpha \leqq f(x) \leqq \beta$. Ferner sei $\varphi(u)$ eine stetige Funktion in (α, β). Endlich sei $f(a) = \gamma$, $f(b) = \delta$.

Dann hat

$$F(u) = \int_\gamma^u \varphi(u)\,du \qquad (\alpha \leqq u \leqq \beta)$$

die Ableitung $\varphi(u)$. Setzen wir $u = f(x)$, so wird $F(u)$ eine Funktion von x, die nach § 32 die Ableitung

$$\varphi(f(x))f'(x)$$

hat. Es wird also, weil $\gamma = f(a)$ und $F(\gamma) = 0$ ist,

$$F(f(x)) = \int_a^x \varphi(f(x))f'(x)\,dx$$

und insbesondere (für $x = b$)

$$\int_\gamma^\delta \varphi(u)\,du = \int_a^b \varphi(f(x))f'(x)\,dx.$$

§ 56. Berechnung von Flächeninhalten.

$f(x)$ sei für $a \leqq x \leqq b$ stetig und nie negativ. Die Bildkurve von $f(x)$ liegt dann ganz auf einer Seite der x-Achse. Wir wollen von den Endpunkten der Bildkurve Lote auf die x-Achse fällen und das Flächenstück $\mathfrak{A}$ betrachten, welches diese beiden Lote, die x-Achse und die Bildkurve umgrenzen.

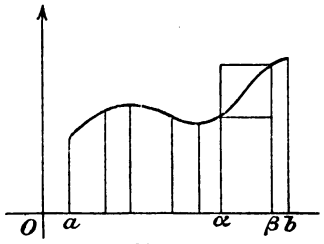


Fig. 14.

Nehmen wir irgendeine Zerlegung $\mathfrak{Z}$ der Basis des Flächenstücks, d. h. des Intervalls (a, b), vor und errichten in den Teilpunkten Lote auf der x-Achse, so zerlegt sich das Flächenstück in eine Anzahl gleichartiger Flächenstücke. Ist (α, β) eins der Teileintrvalle und $m(\alpha, \beta)$ der kleinste, $M(\alpha, \beta)$ der größte Funktionswert in (α, β), so ist das über (α, β) stehende Flächenstück nicht kleiner als das Rechteck $(\beta - \alpha)m(\alpha, \beta)$ und nicht größer als das Rechteck $(\beta - \alpha)M(\alpha, \beta)$. Es ist somit sicher

$$s_a^b(\mathfrak{Z}) \leqq \mathfrak{A} \leqq S_a^b(\mathfrak{Z}).$$

Läßt man $\mathfrak{Z}$ eine ausgezeichnete Folge von Zerlegungen durchlaufen, so konvergieren die einschließenden Größen beide nach $\int_a^b f(x)\,dx$. Folglich ist auch

$$\mathfrak{A} = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Die Berechnung eines Flächeninhalts nennt man eine Quadratur, weil es nach Ausführung derselben möglich ist, ein gleich großes Quadrat anzugeben. Auch die Berechnung eines bestimmten Integrals nennt man infolge des obigen Zusammenhangs eine Quadratur.

§ 57. Beispiele.

1. Die Bildkurve von $y = \frac{x^2}{2k}$ $(0 \leqq x \leqq x_0)$ ist ein Parabelbogen. Der Inhalt des Flächenstücks A (in der Figur schraffiert) ist gleich

$$\frac{1}{2k}\int_0^{x_0} x^2\,dx = \frac{x_0^3}{6k} = \frac{1}{3}x_0 y_0.$$

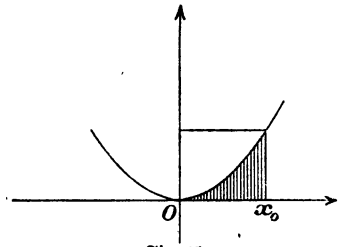


Fig. 15.

Der Parabelbogen teilt also das Rechteck aus x_0 und y_0 so, daß der eine Teil doppelt so groß wie der andre ist.

2. Die Bildkurve von $y = \sqrt{1 - x^2}$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ ist ein Halbkreis. Der Inhalt des Kreises ist daher gleich

$$2\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\,dx.$$

Um dieses Integral zu berechnen, wenden wir die partielle Integration an. Danach ist

$$\int \sqrt{1 - x^2}\,dx = x\sqrt{1 - x^2} + \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$= x\sqrt{1 - x^2} - \int \sqrt{1 - x^2}\,dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}},$$

also

$$2\int \sqrt{1 - x^2}\,dx = x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x + C$$

und

$$2\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\,dx = \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \pi.$$

3. Wenn ein Rad in gerader Linie rollt ohne zu gleiten, so beschreibt jeder Punkt seines Randes eine Kurve, die man eine

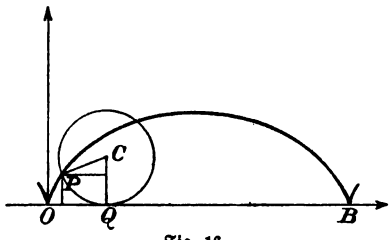


Fig. 16.

Zykloide*) nennt. Sie besteht aus unendlich vielen kongruenten Bögen wie OPB.

Wir wollen das Flächenstück berechnen, daß ein solcher Zykloidenbogen zusammen mit der Basis OB umgrenzt. Aus der Figur, in welcher der Kreisbogen PQ gleich OQ ist (wie aus der Definition der Zykloide folgt), entnimmt man, daß die Koordinaten eines Zykloidenpunktes P durch die Formeln

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

gegeben sind. t ist der Winkel PCQ. Wenn t von 0 bis 2π wächst, beschreibt P den Zykloidenbogen APB. Da

$$dx = a(1 - \cos t)\,dt, \quad y\,dx = a^2(1 - \cos t)^2\,dt$$

ist, so ist der zu berechnende Flächeninhalt gleich

$$a^2\int_0^{2\pi}(1 - \cos t)^2\,dt = a^2\int_0^{2\pi}(1 - 2\cos t + \cos^2 t)\,dt$$

oder wegen $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)$ gleich

$$a^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t\right)dt = 3\pi a^2.$$

Der gesuchte Flächeninhalt ist also gleich dem Dreifachen des erzeugenden Kreises.

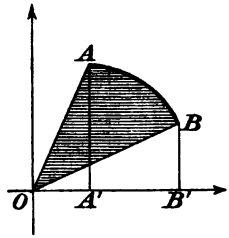


Fig. 17.

4. Wir wollen, wenn A und B die Endpunkte der Kurve $y = f(x)$ sind ($a \leqq x \leqq b$), das Flächenstück $\mathfrak{B}$ berechnen, welches die Kurve zusammen mit den beiden Geraden AO und OB begrenzt.

Es möge der spezielle Fall vorliegen, den Fig. 17 darstellt. Dann hat man

$$\mathfrak{B} = A'B'BA + OA'A - OB'B.$$

*) Galilei ist der erste, der diese Kurve betrachtet hat.

Es ist also

$$\mathfrak{B} = \int_a^b y\,dx - \frac{1}{2}(xy)_a^b$$

oder*)

$$\mathfrak{B} = \int_a^b y\,dx - \frac{1}{2}\int_a^b (x\,dy + y\,dx),$$

d. h.

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{2}\int_a^b (y\,dx - x\,dy).$$

Die unabhängige Veränderliche ist hier x.

Diese Formel rührt von Leibniz her.

§ 58. Berechnung von Bogenlängen.

$y = f(x)$ habe in (a, b) eine stetige Ableitung $f'(x)$. Wir wollen die Bogenlänge der Bildkurve von $f(x)$ berechnen. Wir zerlegen (a, b) in die Teilintervalle

$$(a, x_1),\ (x_1, x_2),\ \ldots,\ (x_{p-1}, b)$$

und nennen diese Zerlegung $\mathfrak{Z}$.

Die Kurvenpunkte, deren Abszissen

$$a,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{p-1},\ b$$

sind, mögen

$$A,\ P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_{p-1},\ B$$

heißen. Die Länge der gebrochenen Linie $AP_1P_2\ldots P_{p-1}B$ bezeichnen wir mit $l(\mathfrak{Z})$. Wenn $\mathfrak{Z}$ eine ausgezeichnete Folge von Zerlegungen durchläuft, so konvergiert, wie wir sehen werden, $l(\mathfrak{Z})$ immer nach demselben Grenzwert l. Dieser Grenzwert ist die gesuchte Bogenlänge**).

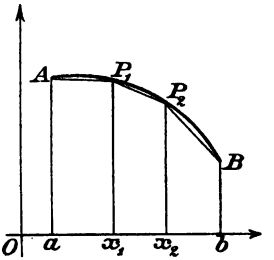


Fig. 18.

*) Wir nehmen an, daß $f'(x)$ in (a, b) stetig ist, damit die Integrale existieren.

**) Die Bogenlänge einer Kurve ist hierdurch überhaupt erst definiert. Ähnlich hätten wir es streng genommen auch bei dem Flächeninhalt in § 56 machen müssen.

Wenn wir die Sehne berechnen, die dem Intervall (α, β) entspricht, so finden wir

$$\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(f(\beta)-f(\alpha))^2}=(\beta-\alpha)\sqrt{1+f'^2(\xi)}.$$
$$(\alpha<\xi<\beta)$$

Dabei haben wir den Mittelwertsatz aus § 30 angewandt. Setzen wir

$$\varphi(x)=\sqrt{1+f'^2(x)}$$

so wird

$$l(\mathfrak{Z})=(x_1-a)\varphi(\xi_1)+(x_2-x_1)\varphi(\xi_2)+\cdots$$
$$+(b-x_{p-1})\varphi(\xi_p);$$

$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ liegen bezüglich im Innern von (a, x_1), (x_1, x_2), $\ldots$, (x_{p-1}, b).

Wir wollen den größten und den kleinsten Wert von $\varphi(x)$ in (α, β) mit $M(\alpha, \beta)$ und $m(\alpha, \beta)$ bezeichnen. Dann ist

$$l(\mathfrak{Z})\leqq(x_1-a)M(a, x_1)+(x_2-x_1)M(x_1, x_2)+\cdots$$
$$+(b-x_{p-1})M(x_{p-1}, b),$$
$$l(\mathfrak{Z})\geqq(x_1-a)m(a, x_1)+(x_2-x_1)m(x_1, x_2)+\cdots$$
$$+(b-x_{p-1})m(x_{p-1}, b).$$

Die beiden Ausdrücke rechts konvergieren aber, wenn $\mathfrak{Z}$ eine ausgezeichnete Folge von Zerlegungen durchläuft nach

$$\int_a^b\varphi(x)\,dx=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx^*).$$

Also ist auch

$$l=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$

oder wegen $dy=f'(x)dx$

$$l=\int_a^b\sqrt{dx^2+dy^2}.$$

*) $\sqrt{1+f'^2(x)}$ ist nach § 32 stetig, weil $\sqrt{1+u^2}$ und $f'(x)$ stetig sind.

$\sqrt{dx^2 + dy^2}$ nennt man das **Bogendifferential**, weil

$$d\int_a^x \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

ist.

Die Berechnung einer Bogenlänge nennt man eine **Rektifikation**.

§ 59. Beispiele.

1. Wenn $y = \frac{x^2}{2k}$ ist, so wird

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{k^2}}\,dx,$$

also die Länge des Parabelbogens in § 57, 1 gleich

$$\int_0^{x_0} \sqrt{1 + \frac{x^2}{k^2}}\,dx.$$

Die partielle Integration liefert

$$\int \sqrt{1 + \frac{x^2}{k^2}}\,dx = x\sqrt{1 + \frac{x^2}{k^2}} - \int \frac{\frac{x^2}{k^2}\,dx}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{k^2}}}$$

$$= x\sqrt{1 + \frac{x^2}{k^2}} - \int \sqrt{1 + \frac{x^2}{k^2}}\,dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{k^2}}},$$

so daß

$$\int \sqrt{1 + \frac{x^2}{k^2}}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{1 + \frac{x^2}{k^2}} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{k^2}}}$$

ist. Das letzte Integral können wir aber berechnen. Setzen wir nämlich $x = kz$, so wird nach § 51,2

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{k^2}}} = k\int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = C + k\log\left(z + \sqrt{1 + z^2}\right).$$

Also ist

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+\frac{x^2}{k^2}}} = C + k \log\left(\frac{x}{k} + \sqrt{1+\frac{x^2}{k^2}}\right)$$

und

$$\int_0^{x_0} \sqrt{1+\frac{x^2}{k^2}}\, dx = \frac{x_0\sqrt{x_0^2+k^2}}{2k} + \frac{k}{2} \log \frac{x_0+\sqrt{x_0^2+k^2}}{k}.$$

2. Bei der Zykloide ist

$$dx = a(1-\cos t)\, dt,\ dy = a \sin t\, dt,$$

also

$$dx^2+dy^2 = a^2\left\{(1-\cos t)^2+\sin^2 t\right\} dt^2$$
$$= 2a^2(1-\cos t)\, dt^2$$

oder

$$dx^2+dy^2 = 4a^2 \sin^2\frac{t}{2}\, dt^2,$$

folglich

$$\sqrt{dx^2+dy^2} = 2a \sin\frac{t}{2}\, dt.$$

Die Länge eines ganzen Zykloidenbogens wird

$$2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, dt = -4a\left(\cos\frac{t}{2}\right)_0^{2\pi} = 8a.$$

Die Länge eines Zykloidenbogens ist also gleich dem vierfachen Durchmesser des erzeugenden Kreises.

§ 60. Inhalt und Mantelfläche eines Rotationskörpers.

$y = f(x)$ sei in (a, b) stetig und nie negativ. Wir denken uns die Bildkurve von $f(x)$ gezeichnet und von deren Endpunkten Lote auf die x-Achse gefällt. Diese begrenzen zusammen mit der x-Achse und der Kurve ein Flächenstück A. Lassen wir dasselbe um die x-Achse rotieren, so entsteht ein Rotationskörper K.

Wir wollen ihn durch Ebenen, die wir senkrecht zur x-Achse legen, in Teile zerschneiden. Die zugehörige Zerlegung von (a, b) möge $\mathfrak{Z}$ heißen. Dasjenige Stück von K, das dem Teilintervall (α, β) entspricht, liegt innerhalb eines Zylinders, dessen Grund-

radius $M(\alpha, \beta)$ und dessen Höhe $\beta - \alpha$ ist, und außerhalb eines Zylinders mit derselben Höhe und dem Grundradius $m(\alpha, \beta)$. Des Volumen von $\mathfrak{K}$ ist also größer oder gleich der Summe aller Zylinder $\pi(\beta - \alpha)\, m^2(\alpha, \beta)$ und kleiner oder gleich der Summe aller Zylinder $\pi(\beta - \alpha) M^2(\alpha, \beta)$. Daraus folgt aber, wenn wir eine ausgezeichnete Folge von Zerlegungen durchlaufen, daß

$$\mathfrak{V} = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx = \pi \int_a^b y^2\, dx$$

ist.

Wir wollen jetzt voraussetzen, daß $f(x)$ in (a, b) eine stetige Ableitung $f'(x)$ hat. Wie in § 58 nehmen wir auf der Bildkurve die Punkte $A, P_1, \ldots, P_{p-1}, B$, deren Abszissen $a, x_1 \ldots, x_{p-1}, b$ sind. Jede der Sehnen $A P_1, P_1 P_2, \ldots, P_{p-1} B$ beschreibt dann bei der Rotation der Figur um die x-Achse den Mantel eines abgestumpften Kegels. Die dem Teilintervall (α, β) entsprechende Sehne liefert einen Kegelmantel, der gleich

$$\pi \left\{ f(\alpha) + f(\beta) \right\} \sqrt{(\beta - \alpha)^2 + (f(\beta) - f(\alpha))^2}$$

$$= \pi (\beta - \alpha) \left\{ f(\alpha) + f(\beta) \right\} \sqrt{1 + f'^2(\xi)}$$

$$(\alpha < \xi < \beta)$$

ist. Nun hat man aber

$$f(\alpha) = f(\xi) + (\alpha - \xi) f'(\bar{\xi}),$$

$$f(\beta) = f(\xi) + (\beta - \xi) f'(\bar{\bar{\xi}});$$

$\alpha < \bar{\xi} < \xi < \bar{\bar{\xi}} < \beta$. Also wird unser Kegelmantel gleich

$$2\pi (\beta - \alpha) f(\xi) \sqrt{1 + f'^2(\xi)} + \pi (\beta - \alpha) \varrho,$$

wobei

$$\varrho = (\alpha - \xi) f'(\bar{\xi}) \sqrt{1 + f'^2(\xi)} + (\beta - \xi) f'(\bar{\bar{\xi}}) \sqrt{1 + f'^2(\xi)}.$$

Bezeichnen wir mit μ^2 den größten Wert von $f'^2(x)$ in (a, b) und mit δ die Maximallänge der Teilintervalle (α, β), so ist

$$|\varrho| < \delta \mu \sqrt{1 + \mu^2}.$$

Der größte Wert der Funktion $2\pi f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)}$ in (α, β) sei $\mathfrak{M}(\alpha, \beta)$, der kleinste $\mathfrak{m}(\alpha, \beta)$. Die Summe aller

$(\beta - \alpha) \cdot \mathfrak{m}(\alpha, \beta)$ heiße $\mathfrak{s}_a^b(\mathfrak{Z})$, die Summe aller $(\beta - \alpha)\mathfrak{M}(\alpha, \beta)$ heiße $\mathfrak{S}_a^b(\mathfrak{Z})$. Die Summe der p Kegelmäntel, die von den Sehnen AP_1, P_1P_2, ..., $P_{p-1}B$ erzeugt werden, liegt dann zwischen

$$\mathfrak{s}_a^b(\mathfrak{Z}) - \delta\pi(b-a)\mu\sqrt{1+\mu^2}$$

und

$$\mathfrak{S}_a^b(\mathfrak{Z}) + \delta\pi(b-a)\mu\sqrt{1+\mu^2}.$$

Lassen wir $\mathfrak{Z}$ eine ausgezeichnete Folge von Zerlegungen durchlaufen, so konvergieren (weil $\lim \delta = 0$ ist) beide Größen nach dem Grenzwert

$$2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx = 2\pi\int_a^b y\sqrt{dx^2+dy^2}.$$

Diesen Grenzwert nennen wir die Mantelfläche des Rotationskörpers.

§ 61. Beispiel.

Lassen wir den Halbkreis

$$y = \sqrt{1-x^2} \qquad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

um die x-Achse rotieren, so entsteht eine Kugel vom Radius 1. Ihr Volumen ist nach § 60 gleich

$$\pi\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx.$$

Nun hat man aber

$$\int(1-x^2)\,dx = C + x - \frac{x^3}{3}.$$

Es wird also

$$\pi\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx = \pi\left(x - \frac{x^3}{3}\right)_{-1}^{1} = \frac{4\pi}{3}.$$

Die Oberfläche der Kugel wird nach § 60 gleich

$$2\pi\int_{-1}^{1}dx = 4\pi,$$

weil

$$dx^2 + dy^2 = \frac{dx^2}{1 - x^2}$$

ist.

Legt man durch die Punkte $x = a$, $x = b$*) zwei Ebenen senkrecht zur x-Achse, so entsteht eine Kugelzone. Ihr Volumen ist gleich

$$\pi \int_a^b (1 - x^2)\, dx = \pi \left(b - \frac{b^3}{3}\right) - \pi \left(a - \frac{a^3}{3}\right),$$

ihre Mantelfläche gleich

$$2\pi \int_a^b dx = 2\pi (b - a).$$

Historische Übersicht**).

Die Vorläufer von Leibniz und Newton.

Die ersten Anfänge der Infinitesimalrechnung finden sich schon in den klassischen Arbeiten der großen griechischen Geometer. Insbesondere gilt das von der Integralrechnung. Archimedes (287—212) war im Besitze einer Methode, die im wesentlichen Integralrechnung ist. Das zeigen besonders die kürzlich von Heiberg neu aufgefundenen archimedischen Schriften. Archimedes benutzte seine Methode zur Berechnung von Flächen- und Rauminhalten sowie zur Bestimmung von Schwerpunkten. Berühmt ist seine Quadratur eines Parabelsegments sowie seine Kreis- und Kugelberechnung.

Im Mittelalter sank die Mathematik von der Höhe, die die griechischen Geometer erreicht hatten, völlig herab, und als man im 15. Jahrhundert das Studium der griechischen Geometer begann, fehlte das Verständnis für die Strenge der Beweise, die wir bei

---

*) $-1 \leq a < b \leq 1$.

**) Nach Cantors Vorlesungen über Geschichte der Mathematik und Zeuthens Geschichte der Mathematik im 16. und 17. Jahrhundert. Benutzt sind auch die beiden Schriften von Gerhardt „Die Entdeckung der Differentialrechnung durch Leibniz" und „Die Entdeckung der höheren Analysis".

jenen ausgezeichneten Denkern finden. Trotzdem wirkten besonders die Schriften des Archimedes anregend.

Der berühmte Astronom Johannes Keppler (1571—1630) erreichte eine große Virtuosität in der Handhabung infinitesimaler Methoden. Er kam vermöge seines feinen mathematischen Takts fast immer zu richtigen Ergebnissen, obwohl seine Methoden nichts weniger als exakt waren. In seiner „Stereometria doliorum" (Stereometrie der Weinfässer), die 1615 gedruckt ist, finden wir im ersten Abschnitt eine Rekapitulation der archimedischen Arbeit über Kugel und Zylinder. Hier können wir schon sehen, von welcher Art Kepplers infinitesimale Betrachtungen sind und wie sehr bei ihnen jede Spur eines wirklichen Beweises fehlt. Keppler erklärt z. B., die Kugel bestehe „gewissermaßen" aus unendlich vielen äußerst dünnen Kegeln, die ihre Spitze im Mittelpunkt und ihre Basis auf der Oberfläche der Kugel haben. So ist es dann leicht, den Inhalt der Kugel zu finden, wenn man ihre Oberfläche schon kennt. In ähnlicher Weise berechnet Keppler die Volumina von andern Körpern. So wenig dieses leichtfertige Umgehen mit dem Unendlichkleinen den Forderungen der mathematischen Strenge entspricht, so sehr hat es doch die Forschung gefördert. Man konnte sich leichter bewegen als in der schweren Rüstung einer strengen Methode.

Kepplers Buch übte freilich keinen so großen Einfluß aus. Das glückte in viel höherem Maße der „Methodus indivisibilium" des Mailänders Cavalieri, (1591—1647) obwohl ihre Grundlagen unklar waren und viele Angriffe erfuhren. Wir wissen aus Briefen Cavalieris, daß der große Galilei (1564—1642) eine ähnliche Methode besaß. Cavalieris Hauptidee ist es, ein ebenes Flächenstück als den Inbegriff aller zu einer festen Geraden parallelen Sehnen zu betrachten und einen Körper als den Inbegriff aller zu einer festen Ebene parallelen ebenen Schnitte. Hierin steckt im Grunde der Begriff des bestimmten Integrals, aber doch in einer sehr unklaren Form. Cavalieris Methode wurde von Torricelli, einem Schüler Galileis benutzt, um den Flächeninhalt der Zykloide zu berechnen, und erfuhr auch sonst die mannigfachsten Anwendungen.

In Frankreich haben Fermat (1601—1665), Roberval (1602—1672) und Pascal (1623—1662) Methoden zur Ausführung von Quadraturen entwickelt. Sie verließen z. T. die rein geometrische Darstellungsform, indem sie im Anschluß an Vieta (1540—1603), der hierin als Vorgänger Descartes' zu betrachten ist, die geometrischen Gebilde ins Analytische übersetzten.

Eine äußerst fruchtbare Tätigkeit entfaltete in England Wallis (1616—1703), der sich vielleicht am weitesten von der Strenge der griechischen Geometer entfernt. In seiner „Arithmetica infinitorum" (1655) verwendet er mit großer Kühnheit Induktions- und Analogieschlüsse, die man sonst in der mathematischen Wissenschaft nicht gewöhnt ist.

Wenn auch der Gegenstand, den Wallis behandelt, wie bei seinen Vorgängern die Bestimmung von Flächen- und Rauminhalten ist, so unterscheidet er sich doch von ihnen durch das ganz ausgesprochene Hervortreten der rechnerischen Seite. Er schreibt eine Arithmetica infinitorum.

Probleme, die, wie wir wissen, mit der Differentialrechnung zusammenhängen, sind das Tangentenproblem und das Problem der Maxima und Minima. Sie sind lange vor der Erfindung der Differentialrechnung in speziellen Fällen behandelt worden.

Es ist bekannt, daß schon die Griechen die Tangenten verschiedener Kurven konstruiert haben. Torricelli und Roberval lieferten eine nach ihrer Meinung allgemeine Tangentenmethode auf kinematischer Grundlage.*) In vollster Allgemeinheit konnte aber das Tangentenproblem erst nach der Erfindung der analytischen Geometrie durch Descartes (1596—1650) behandelt werden. Descartes selbst bezeichnet es in seiner Géométrie (1637) als das nützlichste und allgemeinste Problem der Geometrie. Freilich ist Descartes' eigne Lösung dieses Problems, bei der er sich eines die Kurve berührenden Kreises bedient, nicht sehr brauchbar.

Fermat entwickelte eine Methode der Maxima und Minima und eine Tangentenmethode, wobei er mit einem unendlich kleinen Inkrement der unabhängigen Veränderlichen operierte. Auf Grund dieser Tatsache haben sogar französische Mathematiker Fermat als den Erfinder der Differentialrechnung bezeichnet (z. B. Laplace).

Der berühmte holländische Mathematiker und Physiker Huygens (1629—1695) kannte die Arbeiten von Fermat und hat sich mit der Weiterführung und strengeren Begründung seiner Methode beschäftigt.

Auch Barrow (1630—1677), der Lehrer Newtons, hat Verdienste um das Tangentenproblem. Er knüpfte in vielen Punkten an Torricellis Arbeiten an.

---

*) Sie lösten mit Hilfe ihrer kinematischen Betrachtungsweise viele Aufgaben, z. B. gelang Roberval die Rektifikation der Zykloide.

Leibniz.

Gottfried Wilhelm Leibniz wurde 1646 in Leipzig geboren. 15 Jahre alt wurde er 1661 in Leipzig als Student immatrikuliert. Er kam durch das Studium der Logik zur Mathematik, die aber damals an den deutschen Universitäten sehr wenig in Blüte stand. Es war nur die Elementarmathematik, die Leibniz in den Vorlesungen kennen lernte. Auch seine zeitweilige Übersiedelung nach Jena konnte seinen mathematischen Studien nicht besondere Förderung bringen.

Erst viel später, als er schon seine politische Laufbahn begonnen hatte, sollte er mit den neueren Fortschritten der Mathematik bekannt werden. Er kam im Jahre 1672 mit einer diplomatischen Mission nach Paris und lernte dort die berühmten Männer am Hofe Ludwigs des XIV. kennen, unter ihnen Huygens. Dieser hatte gerade damals sein großes Werk „Horologium oscillatorium“ vollendet. Es handelt von der Pendeluhr und bietet im Anschluß daran eine Fülle mechanischer und geometrischer Untersuchungen. Als Leibniz dieses Buch las, erkannte er die Unzulänglichkeit seiner mathematischen Vorbildung, und er begann mit Eifer die Schriften der großen Mathematiker Descartes, Pascal usw. zu studieren. Es dauerte nicht lange, so machte er schon eigene Entdeckungen. Er fand das Resultat, welches wir in § 57 (Nr. 4) mitgeteilt haben und konnte mit dessen Hilfe viele schon bekannte Quadraturen ausführen. Bei dieser Gelegenheit kam er auch auf die Formel

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Schon damals hat sich Leibniz mit der Konvergenz alternierender Reihen beschäftigt. Von ihm rührt auch der Satz her, den wir in § 18, Nr. 2 angegeben haben, den er aber erst später (10. Jan. 1714) in einem Briefe an Johann Bernoulli streng beweist. Ein Brief Newtons, der ihm 1676 durch Oldenburg, den Sekretär der Londoner Gesellschaft der Wissenschaften*) übermittelt wurde, zeigte Leibniz, wie große Fortschritte die englischen Mathematiker auf dem von ihm betretenen Gebiet schon gemacht hatten. Der Newtonsche Brief enthält u. a. die Binomialreihe, sowie die Reihen für $\cos x$ und $\sin x$. Leibniz ließ sich aber nicht etwa entmutigen. Vielmehr steigerten die Newtonschen

*) Leibniz hatte Oldenburg 1673 auf einer Reise nach London kennen gelernt.

Mitteilungen seine Begeisterung für den Gegenstand. Schon 1673 beschäftigte er sich außer mit Quadraturen auch mit dem Tangentenproblem, und 1675 war er schon so weit, daß er die beiden jetzt in der ganzen Welt benutzten Operationszeichen d und $\int$ einführte. Das war ein Schritt von der allergrößten Bedeutung. Mit Recht sagt Leibniz später in einem Briefe an den Marquis de l'Hôpital (1693), daß ein Teil des Geheimnisses der Analysis in der Bezeichnungsweise liegt, und er hat auch bei vielen andern Gelegenheiten die Wichtigkeit einer zweckmäßigen Symbolik betont*). Man kann mit einiger Sicherheit den Tag angeben, an welchem Leibniz zum ersten Male die beiden Symbole d und $\int$ nebeneinander benutzte. Es ist der **29. Oktober 1675**. Leibniz ging sogleich daran, die einfachsten Regeln für das Rechnen mit diesen Symbolen aufzusuchen.**) Er war sich bewußt eine neue Rechnungsart (novum genus calculi, wie er selbst sagt), gefunden zu haben und erkannte die große Tragweite derselben. Und gerade dies gibt uns das Recht ihn für den wahren Erfinder der Infinitesimalrechnung zu halten. Man muß zugeben, daß Leibniz sich an verschiedenen Stellen nicht klar darüber ausspricht, was seine Differentiale eigentlich bedeuten. Aber in seiner ersten Publikation über die Differentialrechnung, die 1684 in den Acta eruditorum erfolgte, finden wir im Anfang die Differentiale genau so definiert, wie wir sie jetzt definieren. Es heißt dort wörtlich: „Gegeben sei eine Achse AX und mehrere Kurven VV, WW, YY, ZZ. Ihre zur Achse senkrechten Ordinaten VX, WX, YX, ZX wollen wir mit v, w, y, z bezeichnen, den Abschnitt AX auf der Achse mit x. Die Tangenten seien VB, WC, YD, ZE. Sie mögen die Achse bezüglich in B, C, D, E treffen. Nunmehr wollen wir mit dx eine beliebig angenommene Strecke bezeichnen und die Strecke, welche sich zu dx verhält wie v (oder w oder y oder z) zu XB (oder XC oder XD oder XE), mit dv (oder dw oder dy oder dz) . . ."

*) Am 26. März 1676 schreibt er: Illustribus exemplis quotidie disco, omnem solvendi pariter problemata et inveniendi theoremata artem, tunc cum res ipsa imaginationi non subjacet aut nimis vasta est, eo redire, ut characteribus sive compendiis imaginationi subjiciatur, atque quae pingi non possunt, qualia sunt intelligibilia, ea pingantur tamen hieroglyphica quadam ratione, sed eadem et philosophica. Quod fit, si non ut pictores, mystae aut Sinenses similitudines quasdam sectemur, sed rei ipsius ideam sequamur.

**) Am 21. November 1675 fand er die Formel $d(uv) = u\,dv + v\,du$.

Da, wie wir wissen, v' die Richtungskonstante der Tangente ist, so wird

$$dv = \frac{XV}{XB}\,dx = v'dx,$$

also gerade das, was wir jetzt das Differential von v nennen.

Leibniz ging 1676 als Vorstand der herzoglichen Bibliothek nach Hannover. Dieses neue Amt und seine politische und philosophische Tätigkeit nahmen ihn stark in Anspruch. Er war aber doch immer mit dem Ausbau seines neuen Calcüls und mit Anwendungen desselben beschäftigt. Es finden sich in seinem Nachlaß verschiedene Entwürfe zu einer definitiven Publikation über den Gegenstand. Eine solche erfolgte aber, wie oben gesagt wurde, erst 1684. Inzwischen hatte sich Leibniz in einem Brief an Newton (1677) über seine Differentialrechnung ausgesprochen.

Kurfürst Friedrich III. berief Leibniz nach Berlin; hier gründete er die Akademie der Wissenschaften. Nach Hannover zurückgekehrt war er 1713 damit beschäftigt dem Kurfürsten von Hannover die Thronfolge in England zu sichern, die ihm die Tories aberkennen wollten. Diese politische Tätigkeit trug wesentlich dazu bei, ihn mit Newton zu verfeinden, der der Partei der Tories angehörte. 1714 kam der Kurfürst von Hannover auf den englischen Thron. Aber Leibniz fiel in Ungnade und war in den letzten Lebensjahren vereinsamt. Er starb, von heftigen körperlichen Leiden geplagt, 1716.

Newton.

Isaak Newton wurde 1642 in Woolsthorpe bei Grantham in Lincolnshire geboren und kam 1661 als Student nach Cambridge. Hier studierte er Descartes' Géométrie und Wallis' Arithmetica infinitorum und hörte die Vorlesungen Barrows. Er hatte, wie man sieht, mehr Glück als Leibniz, der während seiner Studienzeit nichts von den neueren Fortschritten der Mathematik erfuhr. Newton dachte über alles, was er las, selbständig nach und „das stete Nachdenken" war, wie er selbst sagte, der Weg, auf dem er zu seinen großen Entdeckungen kam. In den Jahren 1665—67 fand er (durch das Studium von Wallis angeregt) die Binomialformel für gebrochene positive und negative Exponenten (vgl. oben § 39) und verschiedene andere mit unendlichen Reihen zusammenhängende Resultate.*) Auch legte er damals schon den

*) Z. B. die Reihenentwicklung algebraischer Funktionen.

Grund zu seiner Fluxionsrechnung. Die direkte und die inverse Fluxionsrechnung sind dasselbe wie Differential- und Integralrechnung. In jene Zeit fällt auch seine große Entdeckung der allgemeinen Gavitation. Die Grundidee der Fluxionsrechnung ist die, daß jede Veränderliche oder „Fluente" als Funktion der Zeit betrachtet wird. Die Zeit ist also die allgemeine unabhängige Veränderliche. Die Geschwindigkeit, mit der eine Fluente x sich ändert, nennt Newton die „Fluxion" von x und bezeichnet sie mit $\dot{x}$. Ändert sich x gleichförmig, d. h. in gleichen Zeiten um den gleichen Betrag, so ist $\dot{x} = 1$. Die Newtonschen Fluxionen sind also dasselbe wie die Ableitungen oder Differentialquotienten, nur daß die Zeit die unabhängige Veränderliche ist.

Es muß überraschen, daß Newton, obwohl er schon so viele Anwendungen von seiner Fluxionsrechnung besaß, in seinem großen Werk „Philosophiae naturalis principia mathematica" (1686—87) keinen Gebrauch davon machte. Nach seiner eigenen Angabe hat er die meisten Resultate in diesem Buch mit Hilfe seiner Fluxionsrechnung gefunden und nach dem Erscheinen desselben zeigte auch Leibniz, wie leicht sich die meisten Resultate mittelst der Infinitesimalrechnung ableiten lassen. Es kam aber Newton darauf an, so wichtige Untersuchungen, wie sie die „Principia" enthalten, in einer Form darzustellen, die den Leser nicht nötigt, erst eine neue Rechnungsart kennen zu lernen.

Publiziert hat Newton seine Fluxionsrechnung sehr spät, obwohl verschiedene Abhandlungen längst ausgearbeitet bei ihm lagen. Sein Hauptwerk über Infinitesimalrechnung „Methodus fluxionum et serierum infinitarum" wurde erst nach seinem Tode (er starb 1727) gedruckt. Newton hatte immer eine große Abneigung öffentlich aufzutreten. Es wird gesagt, daß ihn ein Gegenstand, den er bearbeitete, nicht mehr interessierte, sobald andre etwas darüber publiziert hatten. Das mag der Grund gewesen sein, daß seine Fluxionsrechnung so spät veröffentlicht wurde, zu spät, um sich neben dem schon verbreiteten Leibnizschen Calcül Geltung zu verschaffen.

Der Prioritätsstreit zwischen Newton und Leibniz.

Im Jahre 1699 ließ Nicolas Fatio de Duillier (ein Genfer, der Beziehungen zu Huygens hatte und Mitglied der Royal Society war) mit Genehmigung dieser Gesellschaft eine Schrift erscheinen, in der er Leibniz vorwarf, er habe seine Differentialrechnung nicht selbständig erfunden, sondern von Newton entlehnt.

Leibniz beschwerte sich wegen dieser Beschuldigung bei der Royal Society und ließ in den „Acta Eruditorum“ eine Antwort auf Fatios Angriffe erscheinen. Er führt Newtons eignes Zeugnis an, der in den „Principia“ die Unabhängigkeit seiner und der Leibnizschen Entdeckungen öffentlich anerkannt hatte (1687).

Im Jahre 1704 ließ Newton im Anhang eines optischen Werkes eine alte Abhandlung über die Quadratur der Kurven, die eine kurze Darstellung der Fluxionsrechnung enthält, drucken. Leibniz schrieb für die Acta Eruditorum eine Anzeige dieser Schrift, ohne aber seinen Namen zu nennen. In dieser Anzeige findet sich eine Bemerkung, die so aufgefaßt werden kann, als wolle sie Newton die Selbständigkeit der Erfindung absprechen und ihn von Leibniz abhängig machen. Newton scheint, damals durch politische Tätigkeit stark in Anspruch genommen, diesen Aufsatz nicht gelesen zu haben. Vielleicht hätte er sonst darauf geantwortet. Leibniz benutzte auch den Tod Jacob Bernoullis (der zusammen mit seinem Bruder Johann viel für den Ausbau und die Anwendungen des Leibnizschen Calcüls getan hatte), um in einem Nekrolog die „Leibnizsche Infinitesimalanalysis“ als eine große Erfindung hinstellen zu lassen, ohne daß dabei Newton erwähnt wurde.

Von der anderen Seite kam erst 1710 wieder ein Vorstoß. John Keill, ein Anhänger Newtons, schrieb eine Arbeit über Zentripetalkräfte und sagte darin geradezu, Leibniz habe die Newtonsche Fluxionsrechnung „unter Veränderung des Namens und der Bezeichnungsweise in den Acta Eruditorum veröffentlicht“. Leibniz beschwerte sich wieder bei der Royal Society, deren Präsident damals Newton war. Es wurde dann schließlich eine Kommission eingesetzt, die den Tatbestand prüfen sollte. Sie sprach sich dahin aus, daß Newton der erste Erfinder der Infinitesimalrechnung sei. Die Schriftstücke, auf die sich das Urteil stützte, wurden gedruckt und überall verbreitet. Alle Bemühungen Leibnizens und unparteiischer Männer waren erfolglos. Während des ganzen 18. Jahrhunderts hat man die Entscheidung jener Kommission für maßgebend gehalten und erst das 19. Jahrhundert hat die Ehre unseres großen Landsmannes wiederhergestellt. Seine Unabhängigkeit von Newton ist mit Sicherheit nachgewiesen und Niemand darf jetzt daran zweifeln. Abhängig ist er nur — ebenso aber und vielleicht in noch höherem Maße Newton — von den Männern, die wir oben als die Vorläufer beider bezeichneten.

Biermann, Dr. **Otto**, Professor an der k. k. Technischen Hochschule zu Brünn, **Elemente der höheren Mathematik.** Vorlesungen zur Vorbereitung des Studiums der Differentialrechnung, Algebra und Funktionentheorie. [XII u. 382 S.] gr. 8. 1895. geh. n. *M* 10.—, in Leinwand geb. n. *M* 11.—

Burkhardt, Dr. **H.**, Professor an der Universität Zürich, **Vorlesungen über die Elemente der Differential- und Integralrechnung und ihre Anwendung zur Beschreibung von Naturerscheinungen.** Mit 38 Figuren im Text. [XI u. 252 S.] gr. 8. 1907. In Leinwand geb. n. *M* 6.—

Cesàro, **Ernesto**, Professor der Mathematik an der Königl. Universität Neapel, **elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung.** Mit zahlreichen Übungsbeispielen. Nach einem Manuskript des Verfassers deutsch herausgegeben von Dr. G. Kowalewski, Professor an der Kgl. Bergakademie zu Clausthal. Mit 97 Figuren im Text. [VI u. 894 S.] gr. 8. 1904. In Leinwand geb. n. *M* 15.—

Czuber, Dr. **Emanuel**, Professor an der Technischen Hochschule zu Wien, **Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung.** 2 Bände. Zweite, sorgfältig durchgesehene Auflage. gr. 8.

I. Band. Mit 115 Figuren im Text. [XIV u. 560 S.] 1906. In Leinwand geb. n. *M* 12.—
II. — Mit 87 Figuren im Text. [VIII u. 532 S.] 1906. In Leinwand geb. n. *M* 12.—

Fisher, Dr. phil. **Irving**, Professor der Nationalökonomie an der Yale Universität, **kurze Einleitung in die Differential- und Integralrechnung** (Infinitesimalrechnung). Aus der durch mehrere Verbesserungen des Verfassers vervollständigten dritten englischen Ausgabe übersetzt von N. Pinkus. Mit 11 Figuren im Text. [VI u. 72 S.] gr. 8. 1904. In Leinwand geb. n. *M* 1.80.

Fricke, Dr. **Robert**, Professor an der Technischen Hochschule zu Braunschweig, und Geh. Regierungsrat Dr. **Felix Klein**, Professor an der Universität Göttingen, **Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen.** In 2 Bänden.

I. Band. **Die gruppentheoretischen Grundlagen.** Mit 192 Figuren im Text. [XIV u. 634 S.] gr. 8. 1897. geh. n. *M* 22.—
II. — **Die funktionentheoretischen Ausführungen und die Anwendungen.** 1. Hälfte. **Engere Theorie der automorphen Funktionen.** Mit 34 Figuren im Text. [382 S.] gr. 8. 1901. geh. n. *M* 10.—

Genocchi, **Angelo**, **Differentialrechnung und Anfangsgründe der Integralrechnung**, herausgegeben von Giuseppe Peano. Autorisierte deutsche Übersetzung von Dr. G. Bohlmann, Professor in Berlin, und A. Schepp, weiland Oberleutnant a. D. in Wiesbaden. Mit einem Vorwort von A. Mayer. [VII u. 399 S.] gr. 8. 1899. In Leinwand geb. n. *M* 12.—

Harnack, Dr. **Axel**, weiland Professor der Mathematik an dem Polytechnikum zu Dresden, **die Elemente der Differential- und Integralrechnung.** Zur Einführung in das Studium dargestellt. Mit Figuren im Text. [VIII u. 409 S.] gr. 8. 1881. geh. n. *M* 7.60, in Leinwand geb. n. *M* 8.60.

Amerika. Geschichte der Vereinigten Staaten von Amerika. Von Dr. E. Daenell. (Nr. 147.)

Gibt in großen Zügen eine übersichtliche Darstellung der geschichtlichen, kulturgeschichtlichen und wirtschaftlichen Entwicklung der Vereinigten Staaten von den ersten Kolonisationsversuchen bis zur jüngsten Gegenwart mit besonderer Berücksichtigung der verschiedenen politischen, ethnographischen, sozialen und wirtschaftlichen Probleme, die zur Zeit die Amerikaner besonders bewegen.

——— s. a. Technische Hochschulen, Schulwesen.

Anatomie. Die Anatomie des Menschen. Von Prof. Dr. K. v. Bardeleben. In 4 Bänden. (Nr. 201. 202. 203. 204.)

I. Teil: Allgemeine Anatomie und Entwicklungsgeschichte. Mit 69 Abbild. im Text. (Nr. 201.)

II. Teil: Skelett, Gelenke, Mechanik. Mit zahlreichen Abbildungen. (Nr. 202.)

In einer Reihe von (4) Bänden wird die menschliche Anatomie in knappem, für gebildete Laien leicht verständlichem Texte dargestellt, wobei eine große Anzahl sorgfältig ausgewählter Abbildungen die Anschaulichkeit erhöht. Der erste, die „allgemeine Anatomie" behandelnde Band enthält u. a. einiges aus der Geschichte der Anatomie, von Homer bis zur Neuzeit, ferner die Zellen- und Gewebelehre, die Entwicklungsgeschichte, sowie Formen, Maß und Gewicht des Körpers. Im zweiten Band werden dann Skelett, Knochen und die Gelenke nebst einer Mechanik der letzteren, im dritten die bewegenden Organe des Körpers, die Muskeln, das Herz und die Gefäße, im vierten endlich wird die Eingeweidelehre, namentlich der Darmtraktus, sowie die Harn- und Geschlechtsorgane zur Darstellung gebracht.

——— s. a. Heilwissenschaft; Mensch.

Anthropologie s. Mensch.

Arbeiterschutz. Arbeiterschutz und Arbeiterversicherung. Von weil. Professor Dr. O. v. Zwiedineck-Südenhorst. (Nr. 78.)

Das Buch bietet eine gedrängte Darstellung des gemeiniglich unter dem Titel „Arbeiterfrage" behandelten Stoffes; insbesondere treten die Fragen der Notwendigkeit, Zweckmäßigkeit und der ökonomischen Begrenzung der einzelnen Schutzmaßnahmen und Versicherungseinrichtungen in den Vordergrund.

——— s. a. Versicherung.

Arithmetik und Algebra zum Selbstunterricht. Von Professor Dr. P. Crantz. I. Teil: Die Rechnungsarten. Gleichungen ersten Grades mit einer und mehreren Unbekannten. Gleichungen zweiten Grades. Mit 9 Figuren im Text. (Nr. 120.)

Will in leicht faßlicher und für das Selbststudium geeigneter Darstellung über die Anfangsgründe der Arithmetik und Algebra unterrichten und behandelt die sieben Rechnungsarten, die Gleichungen ersten Grades mit einer und mehreren Unbekannten und die Gleichungen zweiten Grades mit einer Unbekannten, wobei schließlich auch die Logarithmen ausführlich behandelt werden.

——— s. a. Mathematische Spiele.

Ästhetik s. Lebensanschauungen.

Astronomie. Das astronomische Weltbild im Wandel der Zeit. V Professor Dr. S. Oppenheim. Mit 24 Abbildungen im Text. (Nr. 17

Schildert den Kampf der beiden hauptsächlichsten „Weltbilder", des die Erde und des Sonne als Mittelpunkt betrachtenden, der einen bedeutungsvollen Abschnitt in der Kulturgeschichte der Menschheit bildet, wie er schon im Altertum bei den Griechen entstanden anderthalb Jahrtausende später zu Beginn der Neuzeit durch Kopernikus von neuem aufgenommen wurde und da erst mit einem Siege des heliozentrischen Systems schloß.

——— s. a. Kalender; Mond; Weltall.

Atome s. Moleküle.

Aus Natur und Geisteswelt.

Jedes Bändchen geheftet 1 Mk., geschmackvoll gebunden 1 Mk. 25 Pfg.

Auge. Das Auge des Menschen und seine Gesundheitspflege. Von Privatdozent Dr. med. Georg Abelsdorff. Mit 15 Abb. im Text. (Nr. 149.)
Schildert die Anatomie des menschlichen Auges sowie die Leistungen des Gesichtssinnes, besonders soweit sie außer dem medizinischen ein allgemein wissenschaftliches oder ästhetisches Interesse beanspruchen können, und behandelt die Gesundheitspflege (Hygiene) des Auges, besonders Schädigungen, Erkrankungen und Verletzungen des Auges, Kurzsichtigkeit und erhebliche Augenkrankheiten, sowie die künstliche Beleuchtung.

Automobil. Das Automobil. Eine Einführung in Bau und Betrieb des modernen Kraftwagens. Von Ing. Karl Blau. Mit 83 Abb. (Nr. 166.)
Gibt in gedrängter Darstellung und leichtfaßlicher Form einen anschaulichen Überblick über das Gesamtgebiet des modernen Automobilismus, so daß sich auch der Nichttechniker mit den Grundprinzipien rasch vertraut machen kann, und behandelt das Benzinautomobil, das Elektromobil und das Dampfautomobil nach ihren Kraftquellen und sonstigen technischen Einrichtungen, wie Zündung, Kühlung, Bremsen, Steuerung, Bereifung usw.

Baukunst. Deutsche Baukunst im Mittelalter. Von Prof. Dr. A. Matthaei. 2. Auflage. Mit Abbildungen im Text und auf 2 Doppeltafeln. (Nr. 8.)
Der Verfasser will mit der Darstellung der Entwicklung der deutschen Baukunst des Mittelalters zugleich über das Wesen der Baukunst als Kunst aufklären, indem er zeigt, wie sich im Verlauf der Entwicklung die Raumvorstellung klärt und vertieft, wie das technische Können wächst und die praktischen Aufgaben sich erweitern, wie die romanische Kunst geschaffen und zur Gotik weiter entwickelt wird.

——— s. a. Städtebilder.

Beethoven s. Musik.

Befruchtungsvorgang. Der Befruchtungsvorgang, sein Wesen und seine Bedeutung. Von Dr. Ernst Teichmann. Mit 7 Abbildungen im Text und 4 Doppeltafeln. (Nr. 70.)
Will die Ergebnisse der modernen Forschung, die sich mit dem Befruchtungsproblem befaßt, darstellen. Ei und Samen, ihre Genese, ihre Reifung und ihre Vereinigung werden behandelt und im Chromatin die materielle Grundlage der Vererbung nachgewiesen, während die Bedeutung des Befruchtungsvorganges in einer Mischung der Qualität von zwei Individuen zu sehen ist.

——— s. a. Leben.

Beleuchtungsarten. Die Beleuchtungsarten der Gegenwart. Von Dr. phil. Wilhelm Brüsch. Mit 155 Abbildungen im Text. (Nr. 108.)
Gibt einen Überblick über ein gewaltiges Arbeitsfeld deutscher Technik und Wissenschaft, indem die technischen und wissenschaftlichen Bedingungen für die Herstellung einer wirtschaftlichen Lichtquelle und die Methoden für die Beurteilung ihres wirklichen Wertes für den Verbraucher, die einzelnen Beleuchtungsarten sowohl hinsichtlich ihrer physikalischen und chemischen Grundlagen als auch ihrer Technik und Herstellung behandelt werden.

Bevölkerungslehre. Von Professor Dr. M. Haushofer. (Nr. 50.)
Will in gedrängter Form das Wesentliche der Bevölkerungslehre geben über Ermittlung der Volkszahl, über Gliederung und Bewegung der Bevölkerung, Verhältnis der Bevölkerung zum bewohnten Boden und die Ziele der Bevölkerungspolitik.

Bibel. Der Text des Neuen Testaments nach seiner geschichtlichen Entwicklung. Von Div.-Pfarrer A. Pott. Mit 8 Tafeln. (Nr. 134.)
Will in die das allgemeine Interesse an der Textkritik bekundende Frage: „Ist der ursprüngliche Text des Neuen Testamentes überhaupt noch herzustellen?“ durch die Erörterung der Verschiedenheiten des Luthertextes (des früheren, revidierten und durchgesehenen) und seines Verhältnisses zum heutigen (deutschen) „berichtigten“ Text, einführen, den „ältesten Spuren des Textes“ nachgehen, eine „Einführung in die Handschriften“ wie die „ältesten Übersetzungen“ geben und in „Theorie und Praxis“ zeigen, wie der Text berichtigt und rekonstruiert wird.

——— s. a. Jesus; Religion.

Bildungswesen. Das deutsche Bildungswesen in seiner geschichtlichen Entwickelung. Von Professor Dr. Friedrich Paulsen. (Nr. 100.)
Auf beschränktem Raum löst der Verfasser die schwierige Aufgabe, indem er das Bildungswesen stets im Rahmen der allgemeinen Kulturbewegung darstellt, so daß die gesamte Kultur-

entwicklung unseres Volkes in der Darstellung seines Bildungswesens wie in einem verkleinerten Spiegelbild zur Erscheinung kommt. So wird aus dem Büchlein nicht nur für die Erkenntnis der Vergangenheit, sondern auch für die Forderungen der Zukunft reiche Frucht erwachsen.

Bildungswesen s. a. Hochschulen; Schulwesen.

Biologie s. Abstammungslehre; Ameisen; Befruchtungsvorgang; Leben; Meeresforschung; Pflanzen; Plankton; Tierleben.

Björnson s. Ibsen.

Botanik. Kolonialbotanik. Von Privatdozent Dr. Friedrich Tobler. Mit 21 Abbildungen im Text. (Nr. 184.)
Schildert zunächst die allgemeinen wirtschaftlichen Grundlagen tropischer Landwirtschaft, ihre Einrichtungen und Methoden, um dann die bekanntesten Objekte der Kolonialbotanik, wie Kaffee, Kakao, Tee, Zuckerrohr, Reis, Kautschuk, Guttapercha, Baumwolle, Öl- und Kokospalme einer eingehenden Betrachtung zu unterziehen.

——— s. a. Obstbau; Pflanzen; Wald.

Buchgewerbe. Das Buchgewerbe und die Kultur. Sechs Vorträge gehalten im Auftrage des Deutschen Buchgewerbevereins. (Nr. 182.)
Inhalt: Buchgewerbe und Wissenschaft: Prof. Dr. R. Focke. — Buchgewerbe und Literatur: Prof. Dr. G. Witkowski. — Buchgewerbe und Kunst: Prof. Dr. R. Kautzsch. — Buchgewerbe und Religion: Privatdozent lic. Dr. H. Hermelink. — Buchgewerbe und Staat: Prof. Dr. R. Wuttke. — Buchgewerbe und Volkswirtschaft: Prof. Dr. H. Waentig.
Die Vorträge sollen zeigen, wie das Buchgewerbe nach allen Seiten mit sämtlichen Gebieten deutscher Kultur durch tausend Fäden verknüpft ist, wie in ihm sich besonders eng die ideellen und materiellen Bestrebungen und Grundlagen unseres nationalen Lebens miteinander verbinden. Sie wollen nicht nur bei den Angehörigen dieses seit alters her bevorzugten und geistig hochstehenden Gewerbes neue Freude am Beruf erwecken und erhalten, sondern vor allem auch unter den mit ihm in Berührung kommenden Vertretern gelehrter und anderer Berufe verständnisvolle Freunde für seine Eigenart erwerben helfen. In diesem Sinne werden die wichtigsten großen Kulturgebiete behandelt. Der erste Vortrag, über das Buchgewerbe und die Wissenschaft von Prof. Dr. R. Focke dient zugleich als Einleitung in Geist und Absicht der ganzen Reihe, und daran schließen sich dann in naturgemäßer Folge die Beziehungen zur Literatur von Prof. Dr. G. Witkowski, zur Kunst von Prof. Dr. R. Kautzsch, zur Religion von Privatdozent Dr. H. Hermelink, zum Staat von Prof. Dr. R. Wuttke und zur Volkswirtschaft von Prof. Dr. H. Waentig.

——— Wie ein Buch entsteht. Von Prof. A. W. Unger. Mit 7 Tafeln und 26 Abbildungen im Text. (Nr. 175.)
Eine zusammenhängende für weitere Kreise berechnete Darstellung über Geschichte, Herstellung und Vertrieb des Buches mit eingehender Behandlung sämtlicher buchgewerblicher Techniken. Damit will das Buch namentlich auch denen, die als „Autoren" oder in irgend einer anderen näheren Beziehung zur Herstellung des Buches stehen, Anleitung und Belehrung über das umfassende so außerordentlich interessante Gebiet der graphischen Künste, über Ausstattung, Papier, Satz, Illustration, Druck und Einband des Buches geben. Der praktische Wert dieses Bändchens wird erhöht durch zahlreiche Beigaben von Papier-, Schrift- und Illustrationsproben.

——— s. a. Illustrationskunst; Schriftwesen.

Buddha. Leben und Lehre des Buddha. Von Professor Dr. Richard Pischel. Mit 1 Tafel. (Nr. 109.)
Gibt eine wissenschaftlich begründete durchaus objektive Darstellung des Buddhismus, d so oft mit dem Christentum verglichenen Lehre, die von den einen auf Kosten des Christent verherrlicht wird, während die anderen die Lehre Buddhas weit tiefer als dieses ste Einer Übersicht über die Zustände Indiens zur Zeit des Buddha folgt eine Darstellung Lebens des Buddha, wobei besonders die Ähnlichkeiten mit den Evangelien und die Frage Möglichkeit der Übertragung buddhistischer Erzählungen auf Jesus erörtert werden, se Stellung zu Staat und Kirche, seiner Lehrweise, sowie seiner Lehre, wobei die „vier e. Wahrheiten", die „Formel vom Kausalnexus" und der populärste Begriff des „Nirva erörtert werden, seiner Ethik und der weiteren Entwicklung des Buddhismus.

Chemie. Luft, Wasser, Licht und Wärme. Neun Vorträge aus dem Gebiete der Experimental-Chemie. Von Professor Dr. R. Blochmann. 3. Auflage. Mit zahlreichen Abbildungen. (Nr. 5.)
Führt unter besonderer Berücksichtigung der alltäglichen Erscheinungen des praktischen Lebens in das Verständnis der chemischen Erscheinungen ein und zeigt die außerordentliche Bedeutung desselben für unser Wohlergehen.

——— Bilder aus der chemischen Technik. Von Dr. Artur Müller. Mit 24 Abbildungen im Text. (Nr. 191.)
Sucht unter Benutzung lehrreicher Abbildungen die Ziele und Hilfsmittel der chemischen Technik darzulegen, zu zeigen, was dieses Arbeitsgebiet zu leisten vermag und in welcher Weise chemische Prozesse technisch durchgeführt werden, wobei zunächst die allgemein verwendeten Apparate und Vorgänge der chemischen Technik beschrieben, dann praktische Beispiele für deren Verwendung dargestellt und ausgewählte Sonderzweige des gewaltigen Gebietes geschildert werden. Insbesondere werden so die anorganisch-chemische Großindustrie (Schwefelsäure, Soda, Chlor, Salpetersäure usw.), ferner die Industrien, die mit der Destillation organischer Stoffe zusammenhängen (Leuchtgaserzeugung, Teerdestillation, künstliche Farbstoffe usw.) behandelt.

——— Natürliche und künstliche Pflanzen- und Tierstoffe. Ein Überblick über die Fortschritte der neueren organischen Chemie. Von Dr. B. Bavinck. Mit 7 Figuren im Text. (Nr. 187.)
Gibt, ausgehend von einer kurzen Einführung in die Grundlagen der Chemie, einen Einblick in die wichtigsten theoretischen Kenntnisse der organischen Chemie, auf deren Leistungen nächst der Einführung von Dampf und Elektrizität die große Veränderung unserer ganzen Lebenshaltung beruht, und sucht das Verständnis ihrer darauf begründeten praktischen Erfolge zu vermitteln, wobei besonderes Gewicht auf die für die Industrie, Heilkunde und das tägliche Leben wertvollsten Entdeckungen und Erfindungen gelegt wird, andererseits auf die Forschungsergebnisse, welche eine künftige Lösung des Stoffwechselproblems voraussehen lassen, wobei zugleich eine Einsicht in die angehende Kompliziertheit der chemischen Vorzüge im lebenden Organismus eröffnet wird.

——— s. a. Haushalt; Metalle; Pflanzen; Technik.

Christentum. Aus der Werdezeit des Christentums. Studien und Charakteristiken. Von Professor Dr. J. Geffcken. (Nr. 54.)
Gibt durch eine Reihe von Bildern eine Vorstellung von der Stimmung im alten Christentum und von seiner inneren Kraft und verschafft so ein Verständnis für die ungeheure und vielseitige welthistorische kultur- und religionsgeschichtliche Bewegung.

——— s. a. Bibel; Jesus; Religion.

Dampf und Dampfmaschine. Von Prof. R. Vater. Mit 44 Abb. (Nr. 63.)
Schildert die inneren Vorgänge im Dampfkessel und namentlich im Zylinder der Dampfmaschine, um so ein richtiges Verständnis des Wesens der Dampfmaschine und der in der Dampfmaschine sich abspielenden Vorgänge zu ermöglichen.

Darwinismus s. Abstammungslehre.

Deutschland s. a. Dorf; Fürstentum; Geschichte; Kolonien; Volksstämme; Weltwirtschaft; Wirtschaftsgeschichte.

Dorf, das deutsche. Von Robert Mielke. Mit 51 Abb. im Text. (Nr. 192.)
...dert, von den Anfängen der Siedelungen in Deutschland ausgehend, wie sich mit dem ...hsel der Wohnsitze die Gestaltung des Dorfes änderte, wie mit neuen wirtschaftlichen, ...tischen und kulturellen Verhältnissen das Bild immer reicher wurde, bis sie im Anfange 19. Jahrhunderts ein fast wunderbares Mosaik ländlicher Siedelungstypen darstellte, und ...gt so, von der geographischen Grundlage als wichtigem Faktor in der Entwicklung des ...fes, seiner Häuser, Gärten und Straßen ausgehend, politische, wirtschaftliche und künstlerische Gesichtspunkte gleichmäßig zur Geltung, durch ein Kapitel über die Kultur des ...fes die durch zahlreiche Abbildungen belebte Schilderung ergänzend.

...ama. Das deutsche Drama des neunzehnten Jahrhunderts. In seiner ...twicklung dargestellt von Professor Dr. G. Witkowski. 2. Auflage. ...einem Bildnis Hebbels. (Nr. 51.)

Sucht in erster Linie auf historischem Wege das Verständnis des Dramas der Gegenwart anzubahnen und berücksichtigt die drei Faktoren, deren jeweilige Beschaffenheit die Gestaltung des Dramas bedingt: Kunstanschauung, Schauspielkunst und Publikum.

Drama s. a. Ibsen; Schiller; Shakespeare.

Dürer. Albrecht Dürer. Von Dr. Rudolf Wustmann. Mit 33 Abbildungen im Text. (Nr. 97.)
Eine schlichte und knappe Erzählung des gewaltigen menschlichen und künstlerischen Entwicklungsganges Albrecht Dürers und eine Darstellung seiner Kunst, in der nacheinander seine Selbst- und Angehörigenbildnisse, die Zeichnungen zur Apokalypse, die Darstellungen von Mann und Weib, das Marienleben, die Stiftungsgemälde, die Radierungen von Rittertum, Trauer und Heiligkeit sowie die wichtigsten Werke aus der Zeit der Reise behandelt werden.

Ehe und Eherecht. Von Professor Dr. Ludwig Wahrmund. (Nr. 115.)
Schildert in gedrängter Fassung die historische Entwicklung des Ehebegriffes von den orientalischen und klassischen Völkern an nach seiner natürlichen, sittlichen und rechtlichen Seite und untersucht das Verhältnis von Staat und Kirche auf dem Gebiete des Eherechtes, behandelt darüber hinaus aber auch alle jene Fragen über die rechtliche Stellung der Frau und besonders der Mutter, die immer lebhafter die öffentliche Meinung beschäftigen.

Eisenbahnen. Die Eisenbahnen, ihre Entstehung und gegenwärtige Verbreitung. Von Professor Dr. F. Hahn. Mit zahlreichen Abbildungen im Text und einer Doppeltafel. (Nr. 71.)
Nach einem Rückblick auf die frühesten Zeiten des Eisenbahnbaues führt der Verfasser die moderne Eisenbahn im allgemeinen nach ihren Hauptmerkmalen vor. Der Bau des Bahnkörpers, der Tunnel, die großen Brückenbauten, sowie der Betrieb selbst werden besprochen, schließlich ein Überblick über die geographische Verbreitung der Eisenbahnen gegeben.

——— Die technische Entwicklung der Eisenbahnen der Gegenwart. Von Eisenbahnbau- und Betriebsinspektor E. Biedermann. Mit zahlreichen Abbildungen im Text. (Nr. 144.)
Nach einem geschichtlichen Überblick über die Entwicklung der Eisenbahnen werden die wichtigsten Gebiete der modernen Eisenbahntechnik behandelt, Oberbau, Entwicklung und Umfang der Spurbahnnetze in den verschiedenen Ländern, die Geschichte des Lokomotivwesens bis zur Ausbildung der Heißdampflokomotiven einerseits und des elektrischen Betriebes andererseits, sowie der Sicherung des Betriebes durch Stellwerks- und Blockanlagen.

——— s. a. Technik; Verkehrsentwicklung.

Eisenhüttenwesen. Das Eisenhüttenwesen. Erläutert in acht Vorträgen von Geh. Bergrat Professor Dr. H. Wedding. 2. Auflage. Mit 12 Figuren im Text. (Nr. 20.)
Schildert in gemeinfaßlicher Weise, wie Eisen, das unentbehrlichste Metall, erzeugt und in seine Gebrauchsformen gebracht wird. Besonders wird der Hochofenprozeß nach seinen chemischen, physikalischen und geologischen Grundlagen geschildert und die Erzeugung der verschiedenen Eisenarten und die dabei in Betracht kommenden Prozesse erörtert.

Elektrotechnik. Grundlagen der Elektrotechnik. Von Dr. Rud. Blochmann. Mit 128 Abbildungen im Text. (Nr. 168.)
Eine durch lehrreiche Abbildungen unterstützte Darstellung der elektrischen Erscheinungen, ihrer Grundgesetze und ihrer Beziehungen zum Magnetismus, sowie eine Einführung in das Verständnis der zahlreichen praktischen Anwendungen der Elektrizität in den Maschinen zur Krafterzeugung, wie in der elektrischen Beleuchtung und in der Chemie.

——— s. a. Beleuchtungsarten; Funkentelegraphie; Telegraphie.

England. Englands Weltmacht in ihrer Entwicklung vom 17. Jahrhundert bis auf unsere Tage. Von W. Langenbeck. Mit 19 Bildnissen. (Nr. 174.
Schildert nach einem Überblick über das mittelalterliche England die Anfänge der englische Kolonialpolitik im Zeitalter der Königin Elisabeth, die innere politische Entwicklung im 17. un 18. Jahrhundert, das allmähliche Aufsteigen zur Weltmacht, den gewaltigen wirtschaftliche und maritimen Aufschwung, sowie den Ausbau des Kolonialreiches im 18. Jahrhundert un schließt mit einer Beleuchtung über den gegenwärtigen Stand und die mutmaßliche Zukunf des britischen Weltreiches.

Entdeckungen. Das Zeitalter der Entdeckungen. Von Professor Dr. S. Günther. 2. Auflage. Mit einer Weltkarte. (Nr. 26.)
Mit lebendiger Darstellungsweise sind hier die großen weltbewegenden Ereignisse der geographischen Renaissancezeit ansprechend geschildert, von der Begründung der portugiesischen Kolonialherrschaft und den Fahrten des Columbus an bis zu dem Hervortreten der französischen, britischen und holländischen Seefahrer.

——— s. a. Polarforschung.

Erde. Aus der Vorzeit der Erde. Vorträge über allgemeine Geologie. Von Professor Dr. Fr. Frech. Mit 49 Abbildungen im Text und auf 5 Doppeltafeln. (Nr. 61.)
Erörtert die interessantesten und praktisch wichtigsten Probleme der Geologie: die Tätigkeit der Vulkane, das Klima der Vorzeit, Gebirgsbildung, Korallenriffe, Talbildung und Erosion, Wildbäche und Wildbachverbauung.

——— s. a. Mensch und Erde; Wirtschaftsgeschichte.

Erfindungswesen s. Gewerbe.

Ernährung. Ernährung und Volksnahrungsmittel. Sechs Vorträge von weil. Professor Dr. Johannes Frenzel. Mit 6 Abbildungen im Text und 2 Tafeln. (Nr. 19.)
Gibt einen Überblick über die gesamte Ernährungslehre. Durch Erörterung der grundlegenden Begriffe werden die Zubereitung der Nahrung und der Verdauungsapparat besprochen und endlich die Herstellung der einzelnen Nahrungsmittel, insbesondere auch der Konserven behandelt.

——— s. a. Alkoholismus; Haushalt; Kaffee; Säugling.

Erziehung. Moderne Erziehung in Haus und Schule. Vorträge in der Humboldt-Akademie zu Berlin. Von J. Tews. (Nr. 159.)
Betrachtet die Erziehung als Sache nicht eines einzelnen Berufes, sondern der gesamten gegenwärtigen Generation, zeichnet scharf die Schattenseiten der modernen Erziehung und zeigt Mittel und Wege für eine allseitige Durchdringung des Erziehungsproblems. In diesem Sinne werden die wichtigsten Erziehungsfragen behandelt: Die Familie und ihre pädagogischen Mängel, der Lebensmorgen des modernen Kindes, Bureaukratie und Schematismus, Persönlichkeitspädagogik, Zucht und Zuchtmittel, die religiöse Frage, gemeinsame Erziehung der Geschlechter, die Armen am Geiste, Erziehung der reiferen Jugend usw.

——— s. a. Jugendfürsorge; Knabenhandarbeit; Pädagogik; Schulwesen.

Evolutionismus s. Lebensanschauungen.

Farben s. Licht.

Frankreich s. Napoleon.

Frauenarbeit. Die Frauenarbeit, ein Problem des Kapitalismus. Von Privatdozent Dr. Robert Wilbrandt. (Nr. 106.)
Das Thema wird als eine der brennendsten Fragen behandelt, die uns durch den Kapitalismus aufgegeben worden sind, und behandelt von dem Verhältnis von Beruf und Mutterschaft aus, als dem zentralen Problem der ganzen Frage, die Ursachen der niedrigen Bezahlung der weiblichen Arbeit, die daraus entstehenden Schwierigkeiten in der Konkurrenz der Frauen mit den Männern, den Gegensatz von Arbeiterinnenschutz und Befreiung der weiblichen Arbeit.

Frauenbewegung. Die moderne Frauenbewegung. Ein geschichtlicher Überblick. Von Dr. Käthe Schirmacher. (Nr. 67.)
Gibt einen Überblick über die Haupttatsachen der modernen Frauenbewegung in allen Ländern und schildert eingehend die Bestrebungen der modernen Frau auf dem Gebiet der Bildung, der Arbeit, der Sittlichkeit, der Soziologie und Politik.

Frauenkrankheiten. Gesundheitslehre für Frauen. In acht Vorträgen. Von Privatdozent Dr. R. Sticher. Mit 13 Abbildungen im Text. (Nr. 171.)
Eine Gesundheitslehre für Frauen, die über die Anlage des weiblichen Organismus und seine Pflege unterrichtet, zeigt, wie diese bereits im Kindesalter beginnen muß, welche Bedeutung die allgemeine körperliche und geistige Hygiene insbesondere in der Zeit der Entwickelung hat, um sich dann eingehend mit dem Beruf der Frau als Gattin und Mutter zu beschäftigen.

Frauenleben. Deutsches Frauenleben im Wandel der Jahrhunderte. Von Direktor Dr. Ed. Otto. Mit 25 Abbildungen. (Nr. 45.)
Gibt ein Bild des deutschen Frauenlebens von der Urzeit bis zum Beginn des 19. Jahrhunderts, von Denken und Fühlen, Stellung und Wirksamkeit der deutschen Frau, wie sie sich im Wandel der Jahrhunderte darstellen.

Friedensbewegung. Die moderne Fr. Von Alfred H. Fried. (Nr. 157.)
Entwickelt das Wesen und die Ziele der Friedensbewegung, gibt dann eine Darstellung der Schiedsgerichtsbarkeit in ihrer Entwicklung und ihrem gegenwärtigen Umfang mit besonderer Berücksichtigung der hohen Bedeutung der Haager Friedenskonferenz, beschäftigt sich hierauf mit dem Abrüstungsproblem und gibt zum Schluß einen eingehenden Überblick über die Geschichte der Friedensbewegungen und eine chronologische Darstellung der für sie bedeutsamen Ereignisse.

——— s. a. Recht.

Friedrich Fröbel. Sein Leben und sein Wirken. Von Adele v. Portugall. Mit 5 Tafeln. (Nr. 82.)
Lehrt die grundlegenden Gedanken der Methode Fröbels kennen und gibt einen Überblick seiner wichtigsten Schriften mit Betonung aller jener Kernaussprüche, die treuen und oft ratlosen Müttern als Wegweiser in Ausübung ihres hehrsten und heiligsten Berufes dienen können.

Funkentelegraphie. Die Funkentelegraphie. Von Ober-Postpraktikant H. Thurn. Mit 53 Illustrationen. (Nr. 167.)
Nach einer Übersicht über die elektrischen Vorgänge bei der Funkentelegraphie und einer eingehenden Darstellung des Systems Telefunken werden die für die verschiedenen Anwendungsgebiete erforderlichen einzelnen Konstruktionstypen vorgeführt, (Schiffsstationen, Landstationen, Militärstationen und solche für den Eisenbahndienst), wobei nach dem neuesten Stand von Wissenschaft und Technik in jüngster Zeit ausgeführte Anlagen beschrieben werden. Danach wird der Einfluß der Funkentelegraphie auf Wirtschaftsverkehr und das Wirtschaftsleben (im Handels- und Kriegsseeverkehr, für den Heeresdienst, für den Wetterdienst usw.) sowie im Anschluß daran die Regelung der Funkentelegraphie im deutschen und internationalen Verkehr erörtert.

Fürsorgewesen s. Jugendfürsorge.

Fürstentum. Deutsches Fürstentum und deutsches Verfassungswesen. Von Professor Dr. E. Hubrich. (Nr. 80.)
Der Verfasser zeigt in großen Umrissen den Weg, auf dem deutsches Fürstentum und deutsche Volksfreiheit zu dem in der Gegenwart geltenden wechselseitigen Ausgleich gelangt sind, unter besonderer Berücksichtigung der preußischen Verfassungsverhältnisse, wobei nach kürzerer Beleuchtung der älteren Verfassungszustände der Verfasser die Begründung des fürstlichen Absolutismus und demgegenüber das Erwachen, Fortschreiten und Siegen des modernen Konstitutionalismus eingehend bis zur Entstehung der preußischen Verfassung und zur Begründung des deutschen Reiches schildert.

——— s. a. Geschichte; Verfassung.

Gasmaschinen s. Wärmekraftmaschinen.

Geisteskrankheiten. Von Anstaltsoberarzt Dr. Georg Ilberg. (Nr. 151.)
Erörtert das Wesen der Geisteskrankheiten und an eingehend zur Darstellung gelangenden Beispielen die wichtigsten Formen geistiger Erkrankung, um so ihre Kenntnis zu fördern, die richtige Beurteilung der Zeichen geistiger Erkrankung und damit eine rechtzeitige verständnisvolle Behandlung derselben zu ermöglichen.

Geistesleben s. Mensch.

Geographie s. Dorf; Entdeckungen; Japan; Kolonien; Mensch; Palästina Polarforschung; Städte; Volksstämme; Wirtschaftsleben.

Geologie s. Erde.

Germanen. Germanische Kultur in der Urzeit. Von Prof. Dr. G. Steinhausen. Mit 17 Abbildungen. (Nr. 75.)
Das Büchlein beruht auf eingehender Quellenforschung und gibt in fesselnder Darstellung einen Überblick über germanisches Leben von der Urzeit bis zur Berührung der Germanen mit der römischen Kultur.

Germanen. Germanische Mythologie. Von Dr. Jul. v. Negelein. (Nr. 95.)
Der Verfasser gibt ein Bild germanischen Glaubenslebens, indem er die Äußerungen religiösen Lebens namentlich auch im Kultus und in den Gebräuchen des Aberglaubens aufsucht, sich überall bestrebt, das zugrunde liegende psychologische Motiv zu entdecken, die verwirrende Fülle mythischer Tatsachen und einzelner Namen aber demgegenüber zurücktreten läßt.

Geschichte. Politische Hauptströmungen in Europa im 19. Jahrhundert. Von Professor Dr. K. Th. v. Heigel. (Nr. 129.)
Bietet eine knappe Darstellung der wichtigsten politischen Ereignisse vom Ausbruche der französischen Revolution bis zum Ausgang des 19. Jahrhunderts, womit eine Schilderung der politischen Ideen Hand in Hand geht und wobei überall Ursache und Wirkung, d. h. der innere Zusammenhang der einzelnen Vorgänge, dargelegt, auch Sinnesart und Taten wenigstens der einflußreichsten Persönlichkeiten gewürdigt werden.

——— Von Luther zu Bismarck. 12 Charakterbilder aus deutscher Geschichte. Von Professor Dr. Ottokar Weber. 2 Bändchen. (Nr. 123. 124.)
Ein knappes und doch eindrucksvolles Bild der nationalen und kulturellen Entwickelung der Neuzeit, das aus den vier Jahrhunderten je drei Persönlichkeiten herausgreift, die bestimmend eingegriffen haben in den Werdegang deutscher Geschichte. Der große Reformator, Regenten großer und kleiner Staaten, Generale, Diplomaten kommen zu Wort. Was Martin Luther einst geträumt: ein nationales deutsches Kaiserreich, unter Bismarck steht es begründet da.

——— 1848. Sechs Vorträge von Professor Dr. Ottokar Weber. (Nr. 53.)
Bringt auf Grund des überreichen Materials in knapper Form eine Darstellung der wichtigen Ereignisse des Jahres 1848, dieser nahezu über ganz Europa verbreiteten großen Bewegung in ihrer bis zur Gegenwart reichenden Wirkung.

——— Restauration und Revolution. Skizzen zur Entwicklungsgeschichte der deutschen Einheit. Von Professor Dr. Richard Schwemer. (Nr. 37.)

——— Die Reaktion und die neue Ära. Skizzen zur Entwickelungsgeschichte der Gegenwart. Von Professor Dr. Richard Schwemer. (Nr. 101.)

——— Vom Bund zum Reich. Neue Skizzen zur Entwickelungsgeschichte der deutschen Einheit. Von Professor Dr. Richard Schwemer. (Nr. 102.)
Die 3 Bändchen geben zusammen eine in Auffassung und Darstellung durchaus eigenartige Geschichte des deutschen Volkes im 19. Jahrhundert. „Restauration und Revolution" behandelt das Leben und Streben des deutschen Volkes in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts, von dem ersten Aufleuchten des Gedankens des nationalen Staates bis zu dem tragischen Fehlschlagen aller Hoffnungen in der Mitte des Jahrhunderts. „Die Reaktion und die neue Ära", beginnend mit der Zeit der Ermattung nach dem großen Aufschwung von 1848, stellt in den Mittelpunkt des Prinzen von Preußen und Otto von Bismarcks Schaffen. „Vom Bund zum Reich" zeigt uns Bismarck mit sicherer Hand die Grundlage des Reiches vorbereitend und dann immer entschiedener allem Geschehenen das Gepräge seines Geistes verleihend.

——— s. a. Amerika; Bildungswesen; Deutschland; Dorf; England; Entdeckungen; Frauenleben; Fürstentum; Germanen; Japan; Jesuiten; Ingenieurtechnik; Kalender; Kriegswesen; Kultur; Kunst; Literaturgeschichte; Luther; Münze; Musik; Napoleon; Palästina; Philosophie; Pompeji; Rom; Schulwesen; Städtewesen; Verfassung; Volksstämme; Welthandel; Wirtschaftsgeschichte.

Gesundheitslehre. Acht Vorträge aus der Gesundheitslehre. Von Professor Dr. H. Buchner. 2. Auflage, besorgt von Professor Dr. M. Gruber. Mit zahlreichen Abbildungen im Text. (Nr. 1.)
Klarer und überaus fesselnder Darstellung unterrichtet der Verfasser über die äußeren Lebensbedingungen des Menschen, über das Verhältnis von Luft, Licht und Wärme zum menschlichen Körper, über Kleidung und Wohnung, Bodenverhältnisse und Wasserversorgung, die Krankheiten erregenden Pilze und die Infektionskrankheiten, kurz über wichtige Fragen der Hygiene.

——— s. a. Alkoholismus; Auge; Ernährung; Frauenkrankheiten; Geisteskrankheiten; Gymnastik; Haushalt; Heilwissenschaft; Krankenpflege; Mensch; Nervensystem; Säugling; Schulhygiene; Stimme; Tuberkulose.

Gewerbe. Der gewerbliche Rechtsschutz in Deutschland. Von Patentanwalt B. Volksdorf. (Nr. 138.)
Nach einem allgemeinen Überblick über Entstehung und Entwicklung des gewerblichen Rechtsschutzes und einer Bestimmung der Begriffe Patent und Erfindung wird zunächst das deutsche Patentrecht behandelt, wobei der Gegenstand des Patentes, der Patentberechtigte, das Verfahren in Patentsachen, die Rechte und Pflichten des Patentinhabers, das Erlöschen des Patentrechtes und die Verletzung und Anmaßung des Patentschutzes erörtert werden. Sodann wird das Muster- und Warenzeichenrecht dargestellt und dabei besonders Art und Gegenstand der Muster, ihre Nachbildung, Eintragung, Schutzdauer und Löschung dargelegt. Ein weiterer Abschnitt befaßt sich mit den internationalen Verträgen und dem Ausstellungsschutz. Zum Schlusse wird noch die Stellung der Patentanwälte besprochen.

——— s. a. Buchgewerbe; Pflanzen.

Gymnastik. Deutsches Ringen nach Kraft und Schönheit. Aus den literarischen Zeugnissen eines Jahrhunderts gesammelt. Von Turninspektor Karl Möller. I. Band: Von Schiller bis Lange. (Nr. 188.)
Will für die die Gegenwart bewegenden Probleme einer harmonischen Entfaltung aller Kräfte des Körpers und Geistes die gewichtigsten Zeugnisse aus den Schriften unserer führenden Geister beibringen. Das erste Bändchen enthält Aussprüche und Aufsätze von Schiller, Goethe, Jean Paul, Gutsmuths, Jahn, Diesterweg, Roßmäßler, Spieß, Fr. Th. Vischer und Fr. A. Lange.

——— Die Leibesübungen und ihre Bedeutung für die Gesundheit. Von Professor Dr. R. Zander. 2. Auflage. Mit 19 Abbildungen. (Nr. 13.)
Will darüber aufklären, weshalb und unter welchen Umständen die Leibesübungen segensreich wirken, indem es ihr Wesen, andererseits die in Betracht kommenden Organe bespricht; erörtert besonders die Wechselbeziehungen zwischen körperlicher und geistiger Arbeit, die Leibesübungen der Frauen, die Bedeutung des Sportes und die Gefahren der sportlichen Übertreibungen.

——— s. a. Gesundheitslehre.

Handfertigkeit s. Knabenhandarbeit.

Handwerk. Das deutsche Handwerk in seiner kulturgeschichtlichen Entwicklung. Von Direktor Dr. Ed. Otto. 2. Aufl. Mit 27 Abb. auf 8 Tafeln. (Nr. 14.)
Eine Darstellung der Entwicklung des deutschen Handwerks bis in die neueste Zeit, der großen Umwälzung aller wirtschaftlichen Verhältnisse im Zeitalter der Eisenbahnen und Dampfmaschinen und der Handwerkerbewegungen des 19. Jahrhunderts, wie des älteren Handwerkslebens, seiner Sitten, Bräuche und Dichtung.

Haus. Das deutsche Haus und sein Hausrat. Von Professor Dr. Rudolf Meringer. Mit 106 Abbildungen, darunter 85 von Professor A. von Schroetter. (Nr. 116.)
Das Buch will das Interesse an dem deutschen Haus, wie es geworden ist, fördern; mit zahlreichen künstlerischen Illustrationen ausgestattet, behandelt es nach dem „Herdhaus" das oberdeutsche Haus, führt dann anschaulich die Einrichtung der für dieses charakteristischen Stube, den Ofen, den Tisch, das Eßgerät vor und gibt einen Überblick über die Herkunft von Haus und Hausrat.

——— Kulturgeschichte des deutschen Bauernhauses. Von Regierungsbaumeister a. D. Chr. Rauck. Mit 70 Abbildungen. (Nr. 121.)
Der Verfasser führt den Leser in das Haus des germanischen Landwirtes und zeigt dessen Entwicklung, wendet sich dann dem Hause der skandinavischen Bauern zu, um hierauf die Entwicklung des deutschen Bauernhauses während des Mittelalters darzustellen und mit einer Schilderung der heutigen Form des deutschen Bauernhauses zu schließen.

——— s. a. Kunst.

Haushalt. Die Naturwissenschaften im Haushalt. Von Dr. J. Bongardt 2 Bändchen. (Nr. 125. 126.)
I. Teil: Wie sorgt die Hausfrau für die Gesundheit der Familie? Mit 31 Abbildungen.
II. Teil: Wie sorgt die Hausfrau für gute Nahrung? Mit 17 Abbildungen.
Selbst gebildete Hausfrauen können sich Fragen nicht beantworten wie die, weshalb sie z. kondensierte Milch auch in der heißen Zeit in offenen Gefäßen aufbewahren können, weshalb sie hartem Wasser Soda zusetzen, weshalb Obst im kupfernen Kessel nicht erhalten soll. Da

soll hier an der Hand einfacher Beispiele, unterstützt durch Experimente und Abbildungen, das naturwissenschaftliche Denken der Leserinnen so geschult werden, daß sie befähigt werden, auch solche Fragen selbst zu beantworten, die das Buch unberücksichtigt läßt.

Haushalt. Chemie in Küche und Haus. Von Professor Dr. G. Abel. Mit Abbildungen im Text und einer mehrfarbigen Doppeltafel. (Nr. 76.)
Das Bändchen will Gelegenheit bieten, die in Küche und Haus täglich sich vollziehenden chemischen und physikalischen Prozesse richtig zu beobachten und nutzbringend zu verwerten. So werden Heizung und Beleuchtung, vor allem aber die Ernährung erörtert, werden tierische und pflanzliche Nahrungsmittel, Genußmittel und Getränke behandelt.

——— s. a. Kaffee.

Haydn s. Musik.

Hebezeuge. Das Heben fester, flüssiger und luftförmiger Körper. Von Professor Dr. Richard Vater. Mit 67 Abbildungen im Text. (Nr. 196.)
Will, ohne umfangreiche Kenntnisse auf dem Gebiet der Mechanik vorauszusetzen, an der Hand zahlreicher einfacher Skizzen das Verständnis für die Wirkung der Hebezeuge einem weiteren Kreise zugänglich machen. So werden die Hebe-Vorrichtungen fester, flüssiger und luftförmiger Körper nach dem neuesten Stand der Technik einer ausführlichen Betrachtung unterzogen, wobei wichtigere Abschnitte, wie: Hebel und schiefe Ebene, Druckwasserhebevorrichtungen, Zentrifugalpumpen, Gebläse usw. besonders eingehend behandelt sind.

Heilwissenschaft, Die moderne. Wesen und Grenzen des ärztlichen Wissens. Von Dr. E. Biernacki. Deutsch von Badearzt Dr. S. Ebel. (Nr. 25.)
Will in den Inhalt des ärztlichen Wissens und Könnens von einem allgemeineren Standpunkte aus einführen, indem die geschichtliche Entwicklung der medizinischen Grundbegriffe, die Leistungsfähigkeit und die Fortschritte der modernen Heilkunst, die Beziehungen zwischen der Diagnose und der Behandlung der Krankheit, sowie die Grenzen der modernen Diagnostik behandelt werden.

——— Der Aberglaube in der Medizin und seine Gefahr für Gesundheit und Leben. Von Professor Dr. D. von Hansemann. (Nr. 83.)
Behandelt alle menschlichen Verhältnisse, die in irgend einer Beziehung zu Leben und Gesundheit stehen, besonders mit Rücksicht auf viele schädliche Arten des Aberglaubens, die geeignet sind, Krankheiten zu fördern, die Gesundheit herabzusetzen und auch in moralischer Beziehung zu schädigen.

——— s. a. Anatomie; Auge; Frauenkrankheiten; Geisteskrankheiten; Gesundheitslehre; Krankenpflege; Nervensystem; Säugling.

Herbarts Lehren und Leben. Von Pastor O. Flügel. Mit 1 Bildnisse Herbarts. (Nr. 164.)
Herbarts Lehre zu kennen, ist für den Philosophen wie für den Pädagogen gleich wichtig. Indes seine eigenartige Terminologie und Deduktionsweise erschwert das Einleben in seine Gedankengefilde. Flügel versteht es mit musterhaftem Geschick, der Interpret des Meisters zu sein, dessen Werdegang zu prüfen, seine Philosophie und Pädagogik gemeinverständlich darzustellen.

Hilfsschulwesen, Vom. Von Rektor Dr. B. Maennel. (Nr. 73.)
Es wird in kurzen Zügen eine Theorie und Praxis der Hilfsschulpädagogik gegeben. An Hand der vorhandenen Literatur und auf Grund von Erfahrungen wird nicht allein zusammengestellt, was bereits geleistet worden ist, sondern auch hervorgehoben, was noch der Entwicklung und Bearbeitung harrt.

——— s. a. Geisteskrankheiten; Jugendfürsorge.

Hochschulen, Technische, in Nordamerika. Von Prof. Dr. S. Müller. Mit zahlreichen Textabbildungen, einer Karte und Lageplan. (Nr. 190.)
Gibt, von lehrreichen Abbildungen unterstützt, einen anschaulichen Überblick über Organisation, Ausstattung und Unterrichtsbetrieb der amerikanischen technischen Hochschulen unter besonderer Hervorhebung der sie kennzeichnenden Merkmale: enge Fühlung zwischen Lehrern und Studierenden und vorwiegend praktische Tätigkeit in Laboratorien und Werkstätten.

Japan. Die Japaner und ihre wirtschaftliche Entwicklung. Von Prof. Dr. K. Rathgen. (Nr. 72.)
Schildert auf Grund langjähriger eigener Erfahrungen in Japan Land und Leute, Staat und Wirtschaftsleben sowie die Stellung Japans im Weltverkehr und ermöglicht so ein wirkliches Verständnis für die staunenswerte (wirtschaftliche und politische) innere Neugestaltung des Landes in den letzten Jahrzehnten.

Japan s. a. Kunst.

Ibsen. Henrik Ibsen, Björnstjerne Björnson und ihre Zeitgenossen. Von Professor Dr. B. Kahle. (Nr. 193.)
In großen Zügen wird die Entwicklung und die Eigenart der beiden größten Dichter Norwegens dargestellt, einmal auf der Grundlage der Besonderheiten des norwegischen Volkes, andererseits im Zusammenhang mit den kulturellen Strömungen der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts, durch die ergänzende Schilderung von 5 anderen norwegischen Dichtern (Lie, Kielland, Skram, Garborg, Hamsun) erweitert sich die Darstellung zu einem Bild der jüngsten geistigen Entwicklung des uns Deutschen so nahestehenden norwegischen Volkes.

Idealismus s. Lebensanschauungen; Rousseau.

Jesuiten. Die Jesuiten. Eine historische Skizze von Professor Dr. H. Boehmer. 2., vermehrte und verbesserte Auflage. (Nr. 49.)
Ein Büchlein nicht für oder gegen, sondern über die Jesuiten, also der Versuch einer gerechten Würdigung des vielgenannten Ordens, das nicht nur von der sogenannten Jesuitenmoral oder von der Ordensverfassung, sondern auch von der Jesuitenschule, von den Leistungen des Ordens auf dem Gebiete der geistigen Kultur, von dem Jesuitenstaate usw. handelt.

Jesus. Die Gleichnisse Jesu. Zugleich Anleitung zu einem quellenmäßigen Verständnis der Evangelien. Von Lic. Prof. Dr. H. Weinel. 2. Aufl. (Nr. 46.)
Will gegenüber kirchlicher und nichtkirchlicher Allegorisierung der Gleichnisse Jesu mit ihrer richtigen, wörtlichen Auffassung bekannt machen und verbindet damit eine Einführung in die Arbeit der modernen Theologie.

——— Jesus und seine Zeitgenossen. Von Pastor K. Bonhoff. (Nr. 89.)
Die ganze Herbheit und köstliche Frische des Volkskindes, die hinreißende Hochherzigkeit und prophetische Überlegenheit des genialen Volksmannes, die reife Weisheit des Jüngerbildners und die religiöse Tiefe und Weite des Evangeliumverkünders von Nazareth wird erst empfunden, wenn man ihn in seinem Verkehr mit den ihn umgebenden Menschengestalten, Volks- und Parteigruppen zu verstehen sucht, wie es dieses Büchlein tun will.

——— Wahrheit und Dichtung im Leben Jesu. Von Pfarrer Dr. Paul Mehlhorn. (Nr. 137.)
Will zeigen, was von dem im Neuen Testament uns überlieferten Leben Jesu als wirklicher Tatbestand festzuhalten, was als Sage oder Dichtung zu betrachten ist, durch Darlegung der Grundsätze, nach denen die Scheidung des geschichtlich Glaubwürdigen und der es umrankenden Phantasiegebilde vorzunehmen ist und durch Vollziehung der so gekennzeichneten Art chemischer Analyse an den wichtigsten Stoffen des „Lebens Jesu".

——— s. a. Bibel; Christentum; Religion.

Illustrationskunst. Die deutsche Illustration. Von Professor Dr. Rudolf Kautzsch. Mit 35 Abbildungen. (Nr. 44.)
Behandelt ein besonders wichtiges und lehrreiches Gebiet der Kunst und leistet zugleich, indem es an der Hand der Geschichte das Charakteristische der Illustration als Kunst zu erforschen sucht, ein gut Teil „Kunsterziehung".

——— s. a. Buchgewerbe.

Industrie, chemische, s. Pflanzen; Technik.

Infinitesimalrechnung. Einführung in die Inf. mit einer histor. Übersicht. Von Professor Dr. Gerhard Kowalewski. Mit 18 Fig. (Nr. 1[illegible]
Bietet in allgemeinverständlicher Form eine Einführung in die Infinitesimalrechnung, die heute eine streng wissenschaftliche Behandlung der Naturwissenschaften unmöglich ist, die nicht sowohl in dem Kalkül selbst, als vielmehr in der gegenüber der Elementarmathematik veränderten Betrachtungsweise unter den Gesichtspunkten der Kontinuität und des Unendlichen liegenden Schwierigkeiten zu überwinden lehren will.

Ingenieurtechnik. Schöpfungen der Ingenieurtechnik der Neuzeit. Von Baurat Kurt Merckel. 2. Auflage. Mit 55 Abbildungen. (Nr. 28.)
Führt eine Reihe hervorragender und interessanter Ingenieurbauten nach ihrer technischen und wirtschaftlichen Bedeutung vor: die Gebirgsbahnen, die Bergbahnen, und als deren Vorläufer die bedeutenden Gebirgsstraßen der Schweiz und Tirols, die großen Eisenbahnverbindungen in Asien, endlich die modernen Kanal- und Hafenbauten.

——— Bilder aus der Ingenieurtechnik. Von Baurat Kurt Merckel. Mit 43 Abbildungen im Text und auf einer Doppeltafel. (Nr. 60.)
Zeigt in einer Schilderung der Ingenieurbauten der Babylonier und Assyrer, der Ingenieurtechnik der alten Ägypter unter vergleichsweiser Behandlung der modernen Irrigationsanlagen daselbst, der Schöpfungen der antiken griechischen Ingenieure, des Städtebaues im Altertum und der römischen Wasserleitungsbauten die hohen Leistungen der Völker des Altertums.

Israel s. Religion.

Jugend-Fürsorge. Von Direktor Dr. Joh. Petersen. 2 Bände. (Nr. 161. 162.)
Band I: Die öffentliche Fürsorge für die hilfsbedürftige Jugend.
Band II: Die öffentliche Fürsorge für die sittlich gefährdete und die gewerblich tätige Jugend.
Erörtert alle das Fürsorgewesen betreffenden Fragen, deckt die ihm anhaftenden Mängel auf, zeigt zugleich aber auch die Mittel und Wege zu ihrer Beseitigung. Besonders eingehend werden behandelt in dem 1. Bändchen das Vormundschaftsrecht, die Säuglingssterblichkeit, die Fürsorge für uneheliche Kinder, die Gemeindewaisenpflege, die Vor- und Nachteile der Anstalts- und Familienpflege, in dem 2. Bändchen die gewerbliche Ausnutzung der Kinder und der Kinderschutz im Gewerbe, die Kriminalität der Jugend und die Zwangserziehung, die Fürsorge für die schulentlassene Jugend.

Kaffee, Tee, Kakao und die übrigen narkotischen Aufgußgetränke. Von Prof. Dr. A. Wieler. Mit 24 Abb. u. 1 Karte. (Nr. 132.)
Behandelt, durch zweckentsprechende Abbildungen unterstützt, Kaffee, Tee und Kakao eingehender, Mate und Kola kürzer, in bezug auf die botanische Abstammung, die natürliche Verbreitung der Stammpflanzen, die Verbreitung ihrer Kultur, die Wachstumsbedingungen und die Kulturmethoden, die Erntezeit und die Ernte, endlich die Gewinnung der fertigen Ware, wie der Weltmarkt sie aufnimmt, aus dem geernteten Produkte.

——— s. a. Botanik; Ernährung; Haushalt.

Kalender. Der Kalender. Von Professor Dr. W. F. Wislicenus. (Nr. 69.)
Erklärt die astronomischen Erscheinungen, die für unsere Zeitrechnung von Bedeutung sind, und schildert die historische Entwicklung des Kalenderwesens vom römischen Kalender ausgehend, den Werdegang der christlichen Kalender bis auf die neueste Zeit verfolgend, setzt ihre Einrichtungen auseinander und lehrt die Berechnung kalendarischer Angaben für Vergangenheit und Zukunft, sie durch zahlreiche Beispiele erläuternd.

Kant. Immanuel Kant; Darstellung und Würdigung. Von Professor Dr. O. Külpe. Mit einem Bildnisse Kants. (Nr. 146.)
Kant hat durch seine grundlegenden Werke ein neues Fundament für die Philosophie aller Völker und Zeiten geschaffen. Dieses in seiner Tragfähigkeit für moderne Ideen darzustellen, hat sich der Verfasser zur Aufgabe gestellt. Es ist ihm gelungen, den wirklichen Kant mit historischer Treue zu schildern und doch auch zu beleuchten, wie die Nachwelt berufen ist, hinauszustreben über die Anschauungen des gewaltigen Denkers, da auch er ein Kind seiner Zeit ist und manche seiner Lehrmeinungen vergänglicher Art sein müssen.

—— s. a. Philosophie.

nderpflege s. Säugling.

abenhandarbeit, Die, in der heutigen Erziehung. Von Seminardirektor Alw. Pabst. Mit 21 Abbildungen im Text und 1 Titelbild. (Nr. 140.)
t einen Überblick über die Geschichte des Knabenhandarbeitsunterrichts, untersucht seine lung im Lichte der modernen pädagogischen Strömungen und erhärtet seinen Wert als ehungsmittel, erörtert sodann die Art des Betriebes in den verschiedenen Schulen und gibt Schlüsse eine vergleichende Darstellung der Systeme in den verschiedenen Ländern.

Kolonien. Die deutschen Kolonien. Land und Leute. Von Dr. Adolf Heilborn. Mit zahlreichen Abbildungen und 2 Karten. (Nr. 98.)
Bringt auf engem Raume eine durch Abbildungen und Karten unterstützte, wissenschaftlich genaue Schilderung der deutschen Kolonien, sowie eine einwandfreie Darstellung ihrer Völker nach Nahrung und Kleidung, Haus und Gemeindeleben, Sitte und Recht, Glaube und Aberglaube, Arbeit und Vergnügen, Gewerbe und Handel, Waffen und Kampfesweise.

——— s. a. Botanik; England.

Kraftfahrzeuge s. Automobil.

Krankenpflege. Vorträge gehalten von Chefarzt Dr. B. Leick. (Nr. 152.)
Gibt zunächst einen Überblick über Bau und Funktion der inneren Organe des Körpers und deren hauptsächlichsten Erkrankungen und erörtert dann die hierbei zu ergreifenden Maßnahmen. Besonders eingehend wird die Krankenpflege bei Infektionskrankheiten sowie bei plötzlichen Unglücksfällen und Erkrankungen behandelt.

——— s. a. Gesundheitslehre.

Kriegswesen. Vom Kriegswesen im 19. Jahrhundert. Zwanglose Skizzen von Major O. von Sothen. Mit 9 Übersichtskärtchen. (Nr. 59.)
In einzelnen Abschnitten wird insbesondere die Napoleonische und Moltkesche Kriegführung an Beispielen (Jena-Königgrätz-Sedan) dargestellt und durch Kartenskizzen erläutert. Damit verbunden sind kurze Schilderungen der preußischen Armee von 1806 und nach den Befreiungskriegen, sowie nach der Reorganisation von 1860, endlich des deutschen Heeres von 1870 bis zur Jetztzeit.

——— Der Seekrieg. Seine geschichtliche Entwicklung vom Zeitalter der Entdeckungen bis zur Gegenwart. Von Kurt Freiherr von Maltzahn, Vize-Admiral a. D. (Nr. 99.)
Der Verf. bringt den Seekrieg als Kriegsmittel wie als Mittel der Politik zur Darstellung, indem er zunächst die Entwicklung der Kriegsflotte und der Seekriegsmittel schildert und dann die heutigen Weltwirtschaftsstaaten und den Seekrieg behandelt, wobei er besonders das Abhängigkeitsverhältnis, in dem unsere Weltwirtschaftsstaaten kommerziell und politisch zu den Verkehrswegen der See stehen, darstellt.

Kultur. Die Anfänge der menschlichen Kultur. Von Prof. Dr. Ludwig Stein. (Nr. 93.)
Behandelt in der Überzeugung, daß die Kulturprobleme der Gegenwart sich uns nur durch einen tieferen Einblick in ihren Werdegang erschließen, Natur und Kultur, den vorgeschichtlichen Menschen, die Anfänge der Arbeitsteilung, die Anfänge der Rassenbildung, ferner die Anfänge der wirtschaftlichen, intellektuellen, moralischen und sozialen Kultur.

——— s. a. Buchgewerbe; Dorf; Germanen; Geschichte; griech. Städtebilder.

Kunst. Bau und Leben der bildenden Kunst. Von Direktor Dr. Theodor Volbehr. Mit 44 Abbildungen. (Nr. 68.)
Führt von einem neuen Standpunkte aus in das Verständnis des Wesens der bildenden Kunst ein, erörtert die Grundlagen der menschlichen Gestaltungskraft und zeigt, wie das künstlerische Interesse sich allmählich weitere und immer weitere Stoffgebiete erobert.

——— Deutsche Kunst im täglichen Leben bis zum Schlusse des 18. Jahrhunderts. Von Prof. Dr. Berthold Haendke. Mit zahlr. Abb. (Nr. 198.)
Schildert an der Hand zahlreicher Abbildungen, wie die Kunst, vorwiegend die angewandte, im Laufe der Jahrhunderte das deutsche Heim in Burg, Schloß und Haus behaglich gemacht und geschmückt hat, verfolgt durch etwa tausend Jahre, wie die einzelnen Gebrauchs- und Luxusgegenstände des täglichen Lebens entstanden sind und sich gewandelt haben, und stellt so einen Abriß der Geschichte des Kunstgewerbes und des häuslichen Daseins unserer Vorfahren dar.

——— Kunstpflege in Haus und Heimat. Von Superintendent R. Bürkner. Mit 14 Abbildungen. (Nr. 77.)
Will, ausgehend von der Überzeugung, daß zu einem vollen Menschensein und Volkstum die Pflege des Schönen unabweisbar gehört, die Augen zum rechten Sehen öffnen lehren und die ganze Lebensführung, Kleidung und Häuslichkeit ästhetisch gestalten, um so auch zur Erkenntnis dessen zu führen, was an Heimatkunst und Heimatschutz zu hegen ist, und auf diesem großen Gebiete persönlichen und allgemeinen ästhetischen Lebens ein praktischer Ratgeber sein

Kunst. Die ostasiatische Kunst und ihre Einwirkung auf Europa. Von Direktor Dr. R. Graul. Mit 49 Abb. im Text und auf 1 Doppeltafel. (Nr. 87.)
Bringt die bedeutungsvolle Einwirkung der japanischen und chinesischen Kunst auf die europäische zur Darstellung unter Mitteilung eines reichen Bildermaterials, den Einfluß Chinas auf die Entwicklung der zum Rokoko drängenden freien Richtungen in der dekorativen Kunst des 18. Jahrhunderts wie den auf die Entwicklung des 19. Jahrhunderts. Der Verfasser weist auf die Beziehungen der Malerei und Farbendruckkunst Japans zum Impressionismus der modernen europäischen Kunst hin.

——— s. a. Baukunst; Buchgewerbe; Dürer; Städtebilder; Illustrationskunst; Rembrandt; Schriftwesen.

Leben. Die Erscheinungen des Lebens. Grundprobleme der modernen Biologie. Von Privatdozent Dr. H. Miehe. Mit 40 Figuren im Text. (Nr. 130.)
Versucht eine umfassende Totalansicht des organischen Lebens zu geben, indem nach einer Erörterung der spekulativen Vorstellungen über das Leben und einer Beschreibung des Protoplasmas und der Zelle die hauptsächlichsten Aeußerungen des Lebens behandelt werden, als Entwicklung, Ernährung, Atmung, das Sinnesleben, die Fortpflanzung, der Tod, die Variabilität und im Anschluß daran die Theorien über Entstehung und Entwicklung der Lebewelt, sowie die mannigfachen Beziehungen der Lebewesen untereinander.

Lebensanschauungen. Sittliche Lebensanschauungen der Gegenwart. Von Professor Dr. Otto Kirn. (Nr. 177.)
Übt verständnisvolle Kritik an den Lebensanschauungen des Naturalismus, der sich wohl um die Gesunderhaltung der natürlichen Grundlagen des sittlichen Lebens Verdienste erworben, aber seine Ziele nicht zu begründen vermag, des Utilitarismus, der die Menschheit wohl weiter hinaus aber nicht höher hinauf zu blicken lehrt, des Evolutionismus, der auch seinerseits den alten Streit zwischen Egoismus und Altruismus nicht entscheiden kann, an der ästhetischen Lebensauffassung, deren Gefahr in der Überschätzung der schönen Form liegt, die nur als Kleid eines bedeutsamen Inhalts Berechtigung hat, um dann für das überlegene Recht des sittlichen Idealismus einzutreten, indem es dessen folgerichtige Durchführung in der christlichen Weltanschauung aufweist.

Leibesübungen s. Gymnastik.

Licht. Das Licht und die Farben. Sechs Vorlesungen. Von Professor Dr. L. Graetz. 2. Auflage. Mit 116 Abbildungen. (Nr. 17.)
Führt, von den einfachsten optischen Erscheinungen ausgehend, zur tieferen Einsicht in die Natur des Lichtes und der Farben, behandelt, ausgehend von der scheinbar geradlinigen Ausbreitung, Zurückwerfung und Brechung des Lichtes, das Wesen der Farben, die Beugungserscheinungen und die Photographie.

——— s. a. Beleuchtungsarten; Chemie.

Literaturgeschichte s. Buchgewerbe; Drama; Ibsen; Schiller; Shakespeare; Volkslied.

Luther. Luther im Lichte der neueren Forschung. Ein kritischer Bericht. Von Professor Dr. H. Boehmer. (Nr. 113.)
Versucht durch sorgfältige historische Untersuchung eine erschöpfende Darstellung von Luthers Leben und Wirken zu geben, die Persönlichkeit des Reformators aus ihrer Zeit heraus zu erfassen, ihre Schwächen und Stärken beleuchtend zu einem wahrheitsgetreuen Bilde zu gelangen, und gibt so nicht nur ein psychologisches Porträt, sondern bietet zugleich ein interessantes Stück Kulturgeschichte.

——— s. a. Geschichte.

Mädchenschule. Die höhere Mädchenschule in Deutschland. Von Oberlehrerin M. Martin. (Nr. 65.)
Bietet aus berufenster Feder eine Darstellung der Ziele, der historischen Entwicklung, der heutigen Gestalt und der Zukunftsaufgaben der höheren Mädchenschulen.

——— s. a. Bildungswesen; Schulwesen.

Mathematik. Mathematische Spiele. Von Dr. W. Ahrens. Mit 1 Titelbild und 69 Figuren im Text. (Nr. 170.)
Sucht in das Verständnis all der Spiele, die „ungleich voll von Nachdenken" vergnügen, weil man bei ihnen rechnet, ohne Voraussetzung irgend welcher mathematischer Kenntnisse einzuführen und so ihren Reiz für Nachdenkliche erheblich zu erhöhen. So werden unter Beigabe von einfachen, das Mitarbeiten des Lesers belebenden Fragen Wettspringen, Boß-Puzzle, Solitär- oder Einsiedlerspiel, Wanderungsspiele, Dyadische Spiele, der Baguenaudier, Nim, der Rösselsprung und die Magischen Quadrate behandelt.

——— s. a. Arithmetik; Infinitesimalrechnung.

Mechanik s. Hebezeuge.

Meeresforschung. Meeresforschung und Meeresleben. Von Dr. O. Janson. 2. Auflage. Mit 41 Figuren. (Nr. 30.)
Schildert kurz und lebendig die Fortschritte der modernen Meeresuntersuchung auf geographischem, physikalisch-chemischem und biologischem Gebiete, die Verteilung von Wasser und Land auf der Erde, die Tiefen des Meeres, die physikalischen und chemischen Verhältnisse des Meerwassers, endlich die wichtigsten Organismen des Meeres, die Pflanzen und Tiere.

Mensch. Der Mensch. Sechs Vorlesungen aus dem Gebiete der Anthropologie. Von Dr. A. Heilborn. Mit zahlreichen Abbildungen. (Nr. 62.)
Stellt die Lehren der „Wissenschaft aller Wissenschaften" streng sachlich und doch durchaus volkstümlich dar: das Wissen vom Ursprung des Menschen, die Entwicklungsgeschichte des Individuums, die künstlerische Betrachtung der Proportionen des menschlichen Körpers und die streng wissenschaftlichen Meßmethoden (Schädelmessung usf.), behandelt ferner die Menschenrassen, die rassenanatomischen Verschiedenheiten, den Tertiärmenschen.

——— Bau und Tätigkeit des menschlichen Körpers. Von Privatdozent Dr. H. Sachs. 2. Auflage. Mit 37 Abbildungen. (Nr. 32.)
Gibt eine Reihe schematischer Abbildungen, erläutert die Einrichtung und die Tätigkeit der einzelnen Organe des Körpers und zeigt dabei vor allem, wie diese einzelnen Organe in ihrer Tätigkeit aufeinander einwirken, miteinander zusammenhängen und so den menschlichen Körper zu einem einheitlichen Ganzen, zu einem wohlgeordneten Staate machen.

——— Die Mechanik des Geisteslebens. Von Professor Dr. Max Verworn. Mit 11 Figuren im Text. (Nr. 200.)
Will unsere modernen Erfahrungen und Anschauungen über das physiologische Geschehen, das sich bei den Vorgängen des Geisteslebens in unserem Gehirn abspielt, in großen Zügen verständlich machen, indem es die Dinge mit den Begriffen und den Vergleichen des täglichen Lebens schildert. So im ersten Abschnitt: „Leib und Seele" der Standpunkt einer monistischen Auffassung der Welt, die in einem streng wissenschaftlichen Conditionismus zum Ausdruck kommt, erörtert, im zweiten: „Die Vorgänge in den Elementen des Nervensystems" ein Einblick in die Methodik zur Erforschung der physiologischen Vorgänge in denselben, sowie ein Überblick über ihre Ergebnisse, im dritten: „Die Bewußtseinsvorgänge" eine Analyse des Empfindens, Vorstellens, Denkens und Wollens unter Zurückführung dieser Tätigkeiten auf die Vorgänge in den Elementen des Nervensystems gegeben. Der vierte und fünfte Abschnitt beschäftigt sich in analoger Weise mit den Vorgängen des „Schlafes und Traumes" und den scheinbar so geheimnisvollen Tatsachen der „Hypnose und Suggestion".

——— Die Seele des Menschen. Von Prof. Dr. J. Rehmke. 2. Aufl. (Nr. 36.)
Behandelt, von der Tatsache ausgehend, daß der Mensch eine Seele habe, die ebenso gewiß sei wie die andere, daß der Körper eine Gestalt habe, das Seelenwesen und das Seelenleben und erörtert, unter Abwehr der materialistischen und halbmaterialistischen Anschauungen, — dem Standpunkt aus, daß die Seele Unkörperliches Immaterielles sei, nicht etwa eine stimmtheit des menschlichen Einzelwesens, auch nicht eine Wirkung oder eine „Funktion Gehirns, die verschiedenen Tätigkeitsäußerungen des als Seele Erkannten.

——— Die fünf Sinne des Menschen. Von Professor Dr. Jos. Cl Kreibig. Mit 30 Abbildungen im Text. 2., verb. Auflage. (Nr. 27.
Beantwortet die Fragen über die Bedeutung, Anzahl, Benennung und Leistungen der S in gemeinfaßlicher Weise, indem das Organ und seine Funktionsweise, dann die als wirkenden äußeren Ursachen und zuletzt der Inhalt, die Stärke, das räumliche und zeit Merkmal der Empfindungen besprochen werden.

Aus Natur und Geisteswelt.

Jedes Bändchen geheftet 1 Mk., geschmackvoll gebunden 1 Mk. 25 Pfg.

Mensch und Erde. Mensch und Erde. Skizzen von den Wechselbeziehungen zwischen beiden. Von Prof. Dr. A. Kirchhoff. 2. Aufl. (Nr. 31.)
Zeigt, wie die Ländernatur auf den Menschen und seine Kultur einwirkt, durch Schilderungen allgemeiner und besonderer Art, über Steppen- und Wüstenvölker, über die Entstehung von Nationen, wie Deutschland und China u. a. m.

——— **und Tier.** Der Kampf zwischen Mensch und Tier. Von Professor Dr. Karl Eckstein. 2. Auflage. Mit 51 Abbildungen im Text. (Nr. 18.)
Der hohe wirtschaftliche Bedeutung beanspruchende Kampf zwischen Mensch und Tier erfährt eine eingehende, ebenso interessante wie lehrreiche Darstellung; besonders werden die Kampfmittel beider Gegner geschildert: hier Schußwaffen, Fallen, Gifte, oder auch besondere Wirtschaftsmethoden, dort spitzige Kralle, scharfer Zahn, furchtbares Gift, List und Gewandtheit, der Schutzfärbung und Anpassungsfähigkeit nicht zu vergessen.

——— s. a. Anatomie; Auge; Frauenkrankheiten; Gesundheitslehre; Kultur; Säugling; Stimme.

Menschenleben. Aufgaben und Ziele des Menschenlebens. Von Dr. J. Unold. 2. Auflage. (Nr. 12.)
Beantwortet die Frage: Gibt es keine bindenden Regeln des menschlichen Handelns? in zuversichtlich bejahender, zugleich wohl begründeter Weise und entwirft die Grundzüge einer wissenschaftlich haltbaren und für eine nationale Erziehung brauchbaren Lebensanschauung und Lebensordnung.

Metalle. Die Metalle. Von Professor Dr. K. Scheid. 2. Auflage. Mit 16 Abbildungen. (Nr. 29.)
Behandelt die für Kulturleben und Industrie wichtigen Metalle, schildert die mutmaßliche Bildung der Erze, die Gewinnung der Metalle aus den Erzen, das Hüttenwesen mit seinen verschiedenen Systemen, die Fundorte der Metalle, ihre Eigenschaften und Verwendung, unter Angabe historischer, kulturgeschichtlicher und statistischer Daten, sowie die Verarbeitung der Metalle.

Meteorologie s. Wetter.

Mietrecht. Die Miete nach dem bürgerlichen Gesetzbuch. Ein Handbüchlein für Juristen, Mieter und Vermieter. Von Rechtsanwalt Dr. M. Strauß. (Nr. 194.)
Gibt in der Absicht, Mieter und Vermieter über ihr gegenseitiges Verhältnis aufzuklären und so zur Vermeidung vieler oft nur aus der Unkenntnis der gesetzlichen Bestimmungen entspringender Mietprozesse beizutragen, eine gemeinverständliche Darstellung des Mietrechts, die durch Aufnahme der einschlägigen umfangreichen Literatur, sowie der Entscheidungen höchsten Gerichtshöfe, auch dem praktischen Juristen als Handbuch zu dienen vermag.

Mikroskop. Das Mikroskop, seine Optik, Geschichte und Anwendung, gemeinverständlich dargestellt. Von Dr. W. Scheffer. Mit 66 Abbildungen. (Nr. 35.)
Nach Erläuterung der optischen Konstruktion und Wirkung des Mikroskops, und Darstellung der historischen Entwicklung wird eine Beschreibung der modernsten Mikroskoptypen, Hilfsapparate und Instrumente gegeben, endlich gezeigt, wie die mikroskopische Untersuchung die Einsicht in Naturvorgänge vertieft.

——— s. a. Optik; Tierwelt.

Moleküle. Moleküle — Atome — Weltäther. Von Professor Dr. G. Mie. Auflage. Mit 27 Figuren im Text. (Nr. 58.)
t die physikalische Atomlehre als die kurze, logische Zusammenfassung einer großen ge physikalischer Tatsachen unter einem Begriffe dar, die ausführlich und nach Möglich- als einzelne Experimente geschildert werden.

nd. Der Mond. Von Professor Dr. J. Franz. Mit 31 Abbildungen Text und auf 2 Doppeltafeln. (Nr. 90.)
: die Ergebnisse der neueren Mondforschung wieder, erörtert die Mondbewegung und Mondn, bespricht den Einfluß des Mondes auf die Erde und behandelt die Fragen der Oberhenbedingungen des Mondes und die charakteristischen Mondgebilde anschaulich zusammenßt in „Beobachtungen eines Mondbewohners", endlich die Bewohnbarkeit des Mondes.

Mond s. a. Weltall.

Mozart s. Musik.

Münze. Die Münze als historisches Denkmal sowie ihre Bedeutung im Rechts- und Wirtschaftsleben. Von Dr. A. Luschin v. Ebengreuth. Mit 53 Abbildungen im Text. (Nr. 91.)
Zeigt, wie Münzen als geschichtliche Überbleibsel der Vergangenheit zur Aufhellung der wirtschaftlichen Zustände und der Rechtseinrichtungen früherer Zeiten dienen, die verschiedenen Arten von Münzen, ihre äußeren und inneren Merkmale sowie ihre Herstellung werden in historischer Entwicklung dargelegt und im Anschluß daran Münzsammlern beherzigenswerte Winke gegeben.

Musik. Geschichte der Musik. Von Dr. Friedrich Spiro. (Nr. 143.)
Gibt in großen Zügen eine übersichtliche äußerst lebendig gehaltene Darstellung von der Entwicklung der Musik vom Altertum bis zur Gegenwart mit besonderer Berücksichtigung der führenden Persönlichkeiten und der großen Strömungen und unter strenger Ausscheidung alles dessen, was für die Entwicklung der Musik ohne Bedeutung war.

——— Einführung in das Wesen der Musik. Von Prof. C. R. Hennig. (Nr. 119.)
Die hier gegebene Ästhetik der Tonkunst untersucht das Wesen des Tones als eines Kunstmaterials; sie prüft die Natur der Darstellungsmittel und untersucht die Objekte der Darstellung, indem sie klarlegt, welche Ideen im musikalischen Kunstwerke gemäß der Natur des Tonmateriales und der Darstellungsmittel in idealer Gestaltung zur Darstellung gebracht werden können.

——— Die Grundlagen der Tonkunst. Versuch einer genetischen Darstellung der allgemeinen Musiklehre. Von Professor Dr. Heinr. Rietsch. (Nr. 178.)
In leichtfaßlicher, keine Fachkenntnisse voraussetzender Darstellung rollt hier Verfasser ein Entwicklungsbild der musikalischen Erscheinungen auf. Er erörtert zunächst den Stoff der Tonkunst, dann seine Formung (Rhythmik, Harmonik, Metterbildung des rhythmisch-harmonischen Tonstoffes), ferner die schriftliche Aufzeichnung der Tongebilde und behandelt schließlich die Musik als Tonsprache, damit so zugleich auch die Grundlagen einer Musikästhetik gebend.

——— Haydn, Mozart, Beethoven. Von Professor Dr. C. Krebs. Mit vier Bildnissen auf Tafeln. (Nr. 92.)
Eine Darstellung des Entwicklungsganges und der Bedeutung eines jeden der drei großen Komponisten für die Musikgeschichte. Sie gibt mit wenigen, aber scharfen Strichen ein Bild der menschlichen Persönlichkeit und des künstlerischen Wesens der drei Heroen mit Hervorhebung dessen, was ein jeder aus seiner Zeit geschöpft und was er aus eignem hinzugebracht hat.

Muttersprache. Entstehung und Entwicklung unserer Muttersprache. Von Professor Dr. Wilhelm Uhl. Mit vielen Abbildungen im Text und auf Tafeln, sowie mit 1 Karte. (Nr. 84.)
Eine Zusammenfassung der Ergebnisse der sprachlich-wissenschaftlich lautphysiologischen wie der philologisch-germanistischen Forschung, die Ursprung und Organ, Bau und Bildung, andererseits die Hauptperioden der Entwicklung unserer Muttersprache zur Darstellung bringt.

Mythologie s. Germanen.

Nahrungsmittel s. Alkoholismus; Chemie; Ernährung; Haushalt; Kaffee.

Napoleon I. Von Privatdozent Dr. Theodor Bitterauf. Mit einen Bildnis Napoleons. (Nr. 195.)
Will auf Grund der neuesten Ergebnisse der historischen Forschung Napoleon in seiner geschichtlichen Bedingtheit verständlich machen, ohne deshalb seine persönliche Verantwortlichkeit zu leugnen und zeigen, wie im ganzen seine Herrschaft als eine noch in der heutigen Republik wirksame Wohltat angesehen werden muß.

Nationalökonomie s. Arbeiterschutz; Bevölkerungslehre; Deutschland; Soziale Bewegungen; Frauenbewegung; Schiffahrt; Versicherung; Welthandel; Wirtschaftsleben.

Naturalismus s. Lebensanschauungen.

Naturlehre. Die Grundbegriffe der modernen Naturlehre. Von Professor Dr. Felix Auerbach. 2. Auflage. Mit 79 Figuren im Text. (Nr. 40.)
Eine zusammenhängende, für jeden Gebildeten verständliche Entwicklung der in der modernen Naturlehre eine allgemeine und exakte Rolle spielenden Begriffe Raum und Bewegung, Kraft und Masse und die allgemeinen Eigenschaften der Materie, Arbeit, Energie und Entropie.

Naturwissenschaften s. Abstammungslehre; Ameisen; Astronomie; Befruchtungsvorgang; Chemie; Erde; Haushalt; Licht; Meeresforschung; Mensch; Moleküle; Naturlehre; Obstbau; Pflanzen; Plankton; Religion; Strahlen; Tierleben; Wald; Weltall; Wetter.

Nervensystem. Vom Nervensystem, seinem Bau und seiner Bedeutung für Leib und Seele im gesunden und kranken Zustande. Von Professor Dr. R. Zander. Mit 27 Figuren im Text. (Nr. 48.)
Erörtert die Bedeutung der nervösen Vorgänge für den Körper, die Geistestätigkeit und das Seelenleben und sucht klarzulegen, unter welchen Bedingungen Störungen der nervösen Vorgänge auftreten, wie sie zu beseitigen und zu vermeiden sind.

Nordamerika s. Amerika; Technische Hochschulen.

Nordische Dichter s. Ibsen.

Obstbau. Der Obstbau. Von Dr. Ernst Voges. Mit 13 Abb. (Nr. 107.)
Will über die wissenschaftlichen und technischen Grundlagen des Obstbaues, sowie seine Naturgeschichte und große volkswirtschaftliche Bedeutung unterrichten. Die Geschichte des Obstbaues, das Leben des Obstbaumes, Obstbaumpflege und Obstbaumschutz, die wissenschaftliche Obstkunde, die Ästhetik des Obstbaues gelangen zur Behandlung.

Optik. Die optischen Instrumente. Von Dr. M. von Rohr. Mit 84 Abbildungen im Text. (Nr. 88.)
Gibt eine elementare Darstellung der optischen Instrumente nach den modernen Anschauungen, wobei weder das Ultramikroskop noch die neuen Apparate zur Mikrophotographie mit ultraviolettem Licht (Monochromate), weder die Prismen- noch die Zielfernrohre, weder die Projektionsapparate noch die stereoskopischen Entfernungsmesser und der Stereokomparator fehlen.

——— s. a. Mikroskop; Stereoskop.

Ostasien s. Kunst.

Pädagogik. Allgemeine Pädagogik. Von Professor Dr. Th. Ziegler. 2. Auflage. (Nr. 33.)
Behandelt die großen Fragen der Volkserziehung in praktischer, allgemeinverständlicher Weise und in sittlich-sozialem Geiste. Die Zwecke und Motive der Erziehung, das Erziehungsgeschäft selbst, dessen Organisation werden erörtert, die verschiedenen Schulgattungen dargestellt.

——— s. a. Bildungswesen; Erziehung; Fröbel; Herbart; Hilfsschulwesen; Jugendfürsorge; Knabenhandarbeit; Mädchenschule; Rousseau; Schulwesen.

Palästina. Palästina und seine Geschichte. Sechs Vorträge von Professor Dr. H. Freiherr von Soden. 2. Auflage. Mit 2 Karten und 1 Plan von Jerusalem und 6 Ansichten des Heiligen Landes. (Nr. 6.)
Ein Bild, nicht nur des Landes selbst, sondern auch alles dessen, was aus ihm hervor- oder über es hingegangen ist im Laufe der Jahrhunderte — ein wechselvolles, farbenreiches Bild, in dessen Verlauf die Patriarchen Israels und die Kreuzfahrer, David und Christus, die alten Assyrer und die Scharen Mohammeds einander ablösen.

Patentrecht s. Gewerbe.

Pflanzen. Werden und Vergehen der Pflanzen. Von Professor Dr. Paul Giesenius. Mit 24 Abbildungen. (Nr. 173.)

Behandelt in leichtfaßlicher Weise alles, was uns allgemein an der Pflanze interessiert, ihre äußere Entwicklung, ihren inneren Bau, die wichtigsten Lebensvorgänge, wie Nahrungsaufnahme und Atmung, Blühen, Reifen und Verwelken, gibt eine Übersicht über das Pflanzenreich in Urzeit und Gegenwart und unterrichtet über Pflanzenvermehrung und Pflanzenzüchtung. Das Büchlein stellt somit eine kleine „Botanik des praktischen Leben" dar.

——— Vermehrung und Sexualität bei den Pflanzen. Von Privatdozent Dr. Ernst Küster. Mit 38 Abbildungen im Text. (Nr. 112.)

Gibt eine kurze Übersicht über die wichtigsten Formen der vegetativen Vermehrung und beschäftigt sich eingehend mit der Sexualität der Pflanzen, deren überraschend vielfache und mannigfaltige Äußerungen, ihre große Verbreitung im Pflanzenreich und ihre in allen Einzelheiten erkennbare Übereinstimmung mit der Sexualität der Tiere zur Darstellung gelangen.

——— Die Pflanzenwelt des Mikroskops. Von Bürgerschullehrer E. Neukauf. Mit 100 Abbildungen und 165 Einzeldarstellungen nach Zeichnungen des Verfassers. (Nr. 181.)

Will auch dem Unkundigen einen Begriff geben von dem staunenswerten Formenreichtum des mikroskopischen Pflanzenlebens, will den Blick besonders auf die dem unbewaffneten Auge völlig verborgenen Erscheinungsformen des Schönen lenken, aber auch den Ursachen der auffallenden Lebenserscheinungen nachzufragen lehren, wie endlich dem Praktiker durch ausführlichere Besprechung, namentlich der für die Garten- und Landwirtschaft wichtigen mikroskopischen Schädlinge dienen. Um auch zu selbständigem Beobachten und Forschen anzuregen, werden die mikroskopischen Untersuchungen und die Beschaffung geeigneten Materials besonders behandelt.

——— Unsere wichtigsten Kulturpflanzen. (Die Getreidegräser.) Sechs Vorträge aus der Pflanzenkunde. Von Professor Dr. K. Giesenhagen. Mit 38 Figuren im Text. 2. Auflage. (Nr. 10.)

Behandelt die Getreidepflanzen und ihren Anbau nach botanischen wie kulturgeschichtlichen Gesichtspunkten, damit zugleich in anschaulichster Form allgemeine botanische Kenntnisse vermittelnd.

——— s. a. Botanik; Obstbau; Plankton; Tierleben.

Philosophie, Die, der Gegenwart in Deutschland. Eine Charakteristik ihrer Hauptrichtungen. Von Professor Dr. O. Külpe. 3. Auflage. (Nr. 41.)

Schildert die vier Hauptrichtungen der deutschen Philosophie der Gegenwart, den Positivismus, Materialismus, Naturalismus und Idealismus, nicht nur im allgemeinen, sondern auch durch eingehendere Würdigung einzelner typischer Vertreter wie Mach und Dühring, Haeckel, Nietzsche, Fechner, Lotze, v. Hartmann und Wundt.

——— Einführung in die Philosophie. Sechs Vorträge von Professor Dr. Raoul Richter. (Nr. 155.)

Bietet eine gemeinverständliche Darstellung der philosophischen Hauptprobleme und der Richtung ihrer Lösung, insbesondere des Erkenntnisproblems und nimmt dabei zu den Standpunkten des Materialismus, Spiritualismus, Theismus und Pantheismus Stellung, um zum Schlusse die religions- und moralphilosophischen Fragen zu beleuchten.

——— Die Philosophie. Einführung in die Wissenschaft, ihr Wesen und ihre Probleme. Von Oberlehrer Hans Richert. (Nr. 186.)

Will vor allem als Einführung in die wissenschaftliche Beschäftigung mit dem Studium Philosophie dienen, deren Stellung im modernen Geistesleben bestimmend in der Behandl der philosophischen Grundprobleme, des der Erkenntnis, des metaphysischen, des ethischen ästhetischen Problems, die Lösungsversuche gruppieren und charakterisieren, in die Liter der betreffenden Fragen einführen, zu weiterer Vertiefung anregen und die richtigen zu ihr zeigen.

——— Führende Denker. Geschichtliche Einleitung in die Philoso Von Professor Dr. Jonas Cohn. Mit 6 Bildnissen. (Nr. 176.)

Will durch Geschichte in die Philosophie einleiten, indem es von sechs großen Denker für die Philosophie dauernd Bedeutende herauszuarbeiten sucht aus der Überzeugung

die Philosophie im Laufe ihrer Entwicklung mehr als eine Summe geistreicher Einfälle hervorgebracht hat, und daß andererseits aus der Kenntnis der Persönlichkeiten am besten das Verständnis für ihre Gedanken zu gewinnen ist. So werden die scheinbar entlegenen und lebensfremden Gedanken aus der Seele führender, die drei fruchtbarsten Zeitalter in der Geschichte des philosophischen Denkens vertretender Geisteshelden heraus in ihrer inneren, lebendigen Bedeutung nahe zu bringen gesucht, Sokrates und Platon, Descartes und Spinoza, Kant und Fichte in diesem Sinne behandelt.

Philosophie s. a. Buddha; Herbart; Kant; Lebensanschauungen; Menschenleben; Rousseau; Schopenhauer; Weltanschauung; Weltproblem.

Physik s. Licht; Mikroskop; Moleküle; Naturlehre; Optik; Strahlen; Wärme.

Physiologie s. Mensch.

Plankton. Das Süßwasser-Plankton. Einführung in die freischwebende Organismenwelt unserer Teiche, Flüsse und Seebecken. Von Dr. Otto Zacharias. Mit 49 Abbildungen. (Nr. 156.)

Gibt eine Anleitung zur Kenntnis der interessantesten Planktonorganismen, jener mikroskopisch kleinen und für die Existenz der höheren Lebewesen und für die Naturgeschichte der Gewässer so wichtigen Tiere und Pflanzen. Die wichtigsten Formen werden vorgeführt und die merkwürdigen Lebensverhältnisse und -bedingungen dieser unsichtbaren Welt einfach und doch vielseitig erörtert.

Polarforschung. Die Polarforschung. Geschichte der Entdeckungsreisen zum Nord- und Südpol von den ältesten Zeiten bis zur Gegenwart. Von Professor Dr. Kurt Hassert. 2., umgearbeitete und erweiterte Auflage. Mit 6 Karten auf 2 Tafeln. (Nr. 38.)

Das in der neuen Auflage bis auf die Gegenwart fortgeführte und im einzelnen nicht unerheblich umgestaltete Buch faßt in gedrängtem Überblick die Hauptergebnisse der Nord- und Südpolarforschung zusammen. Nach gemeinverständlicher Erörterung der Ziele arktischer und antarktischer Forschung werden die Polarreisen selbst von den ältesten Zeiten bis zur Gegenwart geschildert unter besonderer Berücksichtigung der topographischen Ergebnisse.

Politik s. England; Geschichte.

Pompeji, eine hellenistische Stadt in Italien. Von Hofrat Professor Dr. Fr. v. Duhn. Mit 62 Abbildungen im Text und auf 1 Tafel. (Nr. 114.)

Sucht, durch zahlreiche Abbildungen unterstützt, an dem besonders greifbaren Beispiel Pompejis die Übertragung der griechischen Kultur und Kunst nach Italien, ihr Werden zur Weltkultur und Weltkunst verständlich zu machen, wobei die Hauptphasen der Entwicklung Pompejis, immer im Hinblick auf die gestaltende Bedeutung, die gerade der Hellenismus für die Ausbildung der Stadt, ihrer Lebens- und Kunstformen gehabt hat, zur Darstellung gelangen.

Post. Das Postwesen, seine Entwickelung und Bedeutung. Von Postrat J. Bruns. (Nr. 165.)

Schildert immer unter besonderer Berücksichtigung der geschichtlichen Entwicklung die Post als Staatsverkehrsanstalt, ihre Organisation und ihren Wirkungskreis, das Tarif- und Gebührenwesen, die Beförderungsmittel, den Betriebsdienst, den Weltpostverein, sowie die deutsche im In- und Ausland.

chologie s. Mensch; Nervensystem; Seele.

ht. Moderne Rechtsprobleme. Von Prof. Josef Kohler. (Nr. 128.)

andelt nach einem einleitenden Abschnitte über Rechtsphilosophie die wichtigsten und ressantesten Probleme der modernen Rechtspflege, insbesondere die des Strafrechts, des fprozesses, des Genossenschaftsrechts, des Zivilprozesses und des Völkerrechtes.

—— s. a. Ehe; Gewerbe; Miete.

Religion. Die Grundzüge der israelitischen Religionsgeschichte. Von Professor Dr. Fr. Giesebrecht. (Nr. 52.)
Schildert, wie Israels Religion entsteht, wie sie die nationale Schale sprengt, um in den Propheten die Ansätze einer Menschheitsreligion auszubilden, wie auch diese neue Religion sich verpuppt in die Formen eines Priesterstaats.

——— Religion und Naturwissenschaft in Kampf und Frieden. Ein geschichtlicher Rückblick von Dr. A. Pfannkuche. (Nr. 141.)
Will durch geschichtliche Darstellung der Beziehungen beider Gebiete eine vorurteilsfreie Beurteilung des heiß umstrittenen Problems ermöglichen. Ausgehend von der ursprünglichen Einheit von Religion und Naturerkennen in den Naturreligionen schildert der Verfasser das Entstehen der Naturwissenschaft in Griechenland und der Religion in Israel, um dann zu zeigen, wie aus der Verschwisterung beider jene ergreifenden Konflikte erwachsen, die sich besonders an die Namen von Kopernikus und Darwin knüpfen.

——— Die religiösen Strömungen der Gegenwart. Von Superintendent D. A. H. Braasch. (Nr. 66.)
Will die gegenwärtige religiöse Lage nach ihren bedeutsamen Seiten hin darlegen und ihr geschichtliches Verständnis vermitteln; die markanten Persönlichkeiten und Richtungen, die durch wissenschaftliche und wirtschaftliche Entwicklung gestellten Probleme, wie die Ergebnisse der Forschung, der Ultramontanismus wie die christliche Liebestätigkeit gelangen zur Behandlung.

——— s. a. Bibel; Buchgewerbe; Buddha; Christentum; Germanen; Jesuiten; Jesus; Luther.

Rembrandt. Von Professor Dr. Paul Schubring. Mit einem Titelbild und 49 Textabbildungen. (Nr. 158.)
Eine durch zahlreiche Abbildungen unterstützte lebensvolle Schilderung des menschlichen und künstlerischen Entwickelungsganges Rembrandts. Zur Darstellung gelangen seine persönlichen Schicksale bis 1642, die Frühzeit, die Zeit bis zu Saskias Tode, die Nachtwache, Rembrandts Verhältnis zur Bibel, die Radierungen, Urkundliches über die Zeit nach 1642, die Periode des farbigen Helldunkels, die Gemälde nach der Nachtwache und die Spätzeit. Beigefügt sind die beiden ältesten Biographien Rembrandts.

Rom. Die ständischen und sozialen Kämpfe in der römischen Republik. Von Privatdozent Dr. Leo Bloch. (Nr. 22.)
Behandelt die Sozialgeschichte Roms, soweit sie mit Rücksicht auf die die Gegenwart bewegenden Fragen von allgemeinem Interesse ist. Insbesondere gelangen die durch die Großmachtstellung Roms bedingte Entstehung neuer sozialer Unterschiede, die Herrschaft des Amtsadels und des Kapitals, auf der anderen Seite eines großstädtischen Proletariats zur Darstellung, die ein Ausblick auf die Lösung der Parteikämpfe durch die Monarchie beschließt.

Rousseau. Von Prof. Dr. Paul Hensel. Mit 1 Bildnisse Rousseaus. (Nr. 180.)
Diese Darstellung Rousseaus will diejenigen Seiten der Lebensarbeit des großen Genfers hervorheben, welche für die Entwicklung des deutschen Idealismus bedeutungsvoll gewesen sind, seine Bedeutung darin erkennen lassen, daß er für Goethe, Schiller, Herder, Kant, Fichte die unumgängliche Voraussetzung bildet. In diesem Sinne werden nach einer kurzen Charakteristik Rousseaus die Geschichtsphilosophie, die Rechtsphilosophie, die Erziehungslehre, der von Rousseau neugeschaffene Roman und die Religionsphilosophie dargestellt.

Säugling. Der Säugling, seine Ernährung und seine Pflege. Von Dr. Walther Haupe. Mit 17 Textabbildungen. (Nr. 154.)
Will der jungen Mutter oder Pflegerin in allen Fragen, mit denen sie sich im Interesse des kleinen Erdenbürgers beschäftigen müssen, den nötigen Rat erteilen. Außer der allgemeinen geistigen und körperlichen Pflege des Kindchens wird besonders die natürliche und künstliche Ernährung behandelt und für alle diese Fälle zugleich praktische Anleitung gegeben.

Schiffahrt. Deutsche Schiffahrt und Schiffahrtspolitik der Gegenwart. Von Professor Dr. K. Thieß. (Nr. 169.)
Verfasser will weiteren Kreisen eine genaue Kenntnis unserer Schiffahrt erschließen, indem er in leicht faßlicher und doch erschöpfender Darstellung einen allgemeinen Überblick über das gesamte deutsche Schiffswesen gibt mit besonderer Berücksichtigung seiner geschichtlichen Entwicklung und seiner großen volkswirtschaftlichen Bedeutung.

Schiller. Von Professor Dr. Th. Ziegler. Mit dem Bildnis Schillers von Kügelgen in Heliogravüre. (Nr. 74.)
Gedacht als eine Einführung in das Verständnis von Schillers Werdegang und Werken, behandelt das Büchlein vor allem die Dramen Schillers und sein Leben, daneben aber auch einzelne seiner lyrischen Gedichte und die historischen und die philosophischen Studien als ein wichtiges Glied in der Kette seiner Entwicklung.

Schönheit s. Gymnastik.

Schopenhauer. Seine Persönlichkeit, seine Lehre, seine Bedeutung. Sechs Vorträge v. Oberlehrer H. Richert. Mit d. Bildnis Schopenhauers. (Nr. 81.)
Unterrichtet über Schopenhauer in seinem Werden, seinen Werken und deren Fortwirken, in seiner historischen Bedingtheit und seiner bleibenden Bedeutung, indem es eine gründliche Einführung in die Schriften Schopenhauers und zugleich einen zusammenfassenden Überblick über das Ganze seines philosophischen Systems gibt.

Schriftwesen. Schrift- und Buchwesen in alter und neuer Zeit. Von Professor Dr. O. Weise. 2. Auflage. Mit 37 Abbildungen. (Nr. 4.)
Verfolgt durch mehr als vier Jahrtausende Schrift-, Brief- und Zeitungswesen, Buchhandel und Bibliotheken; wir hören von den Bibliotheken der Babylonier, von den Zeitungen im alten Rom, vor allem aber von der großartigen Entwicklung, die „Schrift- und Buchwesen" in der neuesten Zeit, insbesondere seit Erfindung der Buchdruckerkunst genommen haben.

——— s. a. Buchgewerbe.

Schulhygiene. Von Privatdozent Dr. Leo Burgerstein. Mit einem Bildnis und 33 Figuren im Text. (Nr. 96.)
Bietet eine auf den Forschungen und Erfahrungen in den verschiedensten Kulturländern beruhende Darstellung, die ebenso die Hygiene des Unterrichts und Schullebens wie jene des Hauses, die im Zusammenhang mit der Schule stehenden modernen materiellen Wohlfahrtseinrichtungen, endlich die hygienische Unterweisung der Jugend, die Hygiene des Lehrers und die Schularztfrage behandelt.

Schulwesen. Geschichte des deutschen Schulwesens. Von Oberrealschuldirektor Dr. K. Knabe. (Nr. 85.)
Stellt die Entwicklung des deutschen Schulwesens in seinen Hauptperioden dar und bringt so die Anfänge des deutschen Schulwesens, Scholastik, Humanismus, Reformation, Gegenreformation, neue Bildungsziele, Pietismus, Philanthropismus, Aufklärung, Neuhumanismus, Prinzip der allseitigen Ausbildung vermittels einer Anstalt, Teilung der Arbeit und den nationalen Humanismus der Gegenwart zur Darstellung.

——— Schulkämpfe der Gegenwart. Vorträge zum Kampf um die Volksschule in Preußen, gehalten in der Humboldt-Akademie in Berlin. Von J. Tews. (Nr. 111.)
Knapp und doch umfassend stellt der Verfasser die Probleme dar, um die es sich bei der Reorganisation der Volksschule handelt, deren Stellung zu Staat und Kirche, deren Abhängigkeit von Zeitgeist und Zeitbedürfnissen, deren Wichtigkeit für die Herausgestaltung einer volksfreundlichen Gesamtkultur scharf beleuchtet werden.

——— Volksschule und Lehrerbildung der Vereinigten Staaten in ihren hervortretenden Zügen. Reiseeindrücke. Von Direktor Dr. Franz Kuppers. Mit 48 Abbildungen im Text und einem Titelbild. (Nr. 150.)
Schildert anschaulich das Schulwesen vom Kindergarten bis zur Hochschule, überall das Wesentliche der amerikanischen Erziehungsweise (die stete Erziehung zum Leben, das Wecken des Betätigungstriebes, das Hindrängen auf praktische Verwertung usw.) hervorhebend und unter dem Gesichtspunkte der Beobachtungen an unserer schulentlassenen Jugend in den Fortbildungsschulen zum Vergleich mit der heimischen Unterrichtsweise anregend.

——— s. a. Bildungswesen; Fröbel; Hilfsschulwesen; Hochschulen; Jugendfürsorge; Mädchenschule; Pädagogik.

Seekrieg s. Kriegswesen.

Seele s. Mensch.

Shakespeare und seine Zeit. Von Professor Dr. Ernst Sieper. Mit 3 Tafeln und 3 Textbildern. (Nr. 185.)

Eine „Einführung in Shakespeare", die ein tieferes Verständnis seiner Werke aus der Kenntnis der Zeitverhältnisse, wie des Lebens des Dichters gewinnen lassen will, die Chronologie der Dramen festzustellen, die verschiedenen Perioden seines dichterischen Schaffens zu charakterisieren und so zu einer Gesamtwürdigung Shakespeares, der Eigenart und ethischen Wirkung seiner Dramen zu gelangen sucht.

Sinnesleben s. Mensch.

Soziale Bewegungen. Soziale Bewegungen und Theorien bis zur modernen Arbeiterbewegung. Von Professor Dr. G. Maier. 3. Aufl. (Nr. 2.)

In einer geschichtlichen Betrachtung, die mit den altorientalischen Kulturvölkern beginnt, werden an den zwei großen wirtschaftlichen Schriften Platos die Wirtschaft der Griechen, an der Gracchischen Bewegung die der Römer beleuchtet, ferner die Utopie des Thomas Morus, andererseits der Bauernkrieg behandelt, die Bestrebungen Colberts und das Merkantilsystem, die Physiokraten und die ersten wissenschaftlichen Staatswirtschaftslehrer gewürdigt und über die Entstehung des Sozialismus und die Anfänge der neueren Handels-, Zoll- und Verkehrspolitik aufgeklärt.

——— s. a. Arbeiterschutz; Frauenbewegung.

Spiele s. Mathematik.

Sprache s. Muttersprache; Stimme.

Städtewesen. Die Städte. Geographisch betrachtet. Von Professor Dr. Kurt Hassert. Mit 21 Abbildungen. (Nr. 163.)

Behandelt als Versuch einer allgemeinen Geographie der Städte einen der wichtigsten Abschnitte der Siedlungskunde, erörtert die Ursache des Entstehens, Wachsens und Vergehens der Städte, charakterisiert ihre landwirtschaftliche und Verkehrs-Bedeutung als Grundlage der Großstadtbildung und schildert das Städtebild als geographische Erscheinung.

——— Deutsche Städte und Bürger im Mittelalter. Von Professor Dr. B. Heil. 2. Auflage. Mit zahlreichen Abbildungen im Text und auf 1 Doppeltafel. (Nr. 43.)

Stellt die geschichtliche Entwicklung dar, schildert die wirtschaftlichen, sozialen und staatsrechtlichen Verhältnisse und gibt ein zusammenfassendes Bild von der äußeren Erscheinung und dem inneren Leben der deutschen Städte.

——— Historische Städtebilder aus Holland und Niederdeutschland. Vorträge gehalten bei der Oberschulbehörde in Hamburg. Von Regierungs-Baumeister Albert Erbe. Mit 59 Abbildungen. (Nr. 117.)

Will dem als Zeichen wachsenden Kunstverständnisses zu begrüßenden Sinn für die Reize der alten malerischen Städtebilder durch eine mit Abbildungen reich unterstützte Schilderung so eigenartigen und vielfachen Herrlichkeit Alt-Hollands wie Niederdeutschlands, ferner Dan Lübecks, Bremens und Hamburgs nicht nur vom rein künstlerischen, sondern auch vom ku geschichtlichen Standpunkt aus entgegenkommen.

——— Kulturbilder aus griechischen Städten. Von Oberlehrer Dr. E. Ziebarth. Mit 22 Abbildungen im Text und auf 1 Tafel. (Nr. 1

Sucht ein anschauliches Bild zu entwerfen von dem Aussehen einer altgriechischen Stadt von dem städtischen Leben in ihr, auf Grund der Ausgrabungen und der inschriftlichen I mäler; die altgriechischen Bergstädte Thera, Pergamon, Priene, Milet, der Tempel von Did werden geschildert. Stadtpläne und Abbildungen suchen die einzelnen Städtebilder zu erläu

Stereoskop. Das Stereoskop und seine Anwendungen. Von Professor Th. Hartwig. Mit 40 Abbildungen im Text und 19 stereoskopischen Tafeln. (Nr. 135.)

Behandelt die verschiedenen Erscheinungen und praktischen Anwendungen der Stereoskopie, insbesondere die stereoskopischen Himmelsphotographien, die stereoskopische Darstellung mikroskopischer Objekte, das Stereoskop als Meßinstrument und die Bedeutung und Anwendung des Stereokomparators, insbesondere in bezug auf photogrammetrische Messungen. Beigegeben sind 19 stereoskopische Tafeln.

——— s. a. Optik.

Stimme, die menschliche, und ihre Hygiene. Sieben volkstümliche Vorlesungen. Von Professor Dr. P. Gerber. Mit 20 Abbildungen. (Nr. 136.)

Nach den notwendigsten Erörterungen über das Zustandekommen und über die Natur der Töne wird der Kehlkopf des Menschen, sein Bau, seine Verrichtungen und seine Funktion als musikalisches Instrument behandelt; dann werden die Gesang- und die Sprechstimme, ihre Ausbildung, ihre Fehler und Erkrankungen, sowie deren Verhütung und Behandlung, insbesondere Erkältungskrankheiten, die professionelle Stimmschwäche, der Alkoholeinfluß und die Abhärtung erörtert.

Strahlen. Sichtbare und unsichtbare Strahlen. Von Professor Dr. R. Börnstein und Professor Dr. W. Marckwald. Mit 82 Abbildungen. (Nr. 64.)

Schildert die verschiedenen Arten der Strahlen, darunter die Kathoden- und Röntgenstrahlen, die Hertzschen Wellen, die Strahlungen der radioaktiven Körper (Uran und Radium) nach ihrer Entstehung und Wirkungsweise, unter Darstellung der charakteristischen Vorgänge der Strahlung.

——— s. a. Licht.

Süßwasser-Plankton s. Plankton.

Technik. Am sausenden Webstuhl der Zeit. Übersicht über die Wirkungen der Entwicklung der Naturwissenschaften und der Technik auf das gesamte Kulturleben. Von Geh. Regierungsrat Professor. Dr. W. Launhardt. 2. Auflage. Mit 16 Abbildungen im Text und auf 5 Tafeln. (Nr. 23).

Ein geistreicher Rückblick auf die Entwicklung der Naturwissenschaften und der Technik, der die Weltwunder unserer Zeit verdankt werden.

——— s. a. Automobil; Beleuchtungsarten; Dampf; Eisenbahnen; Eisenhüttenwesen; Elektrotechnik; Funkentelegraphie; Hebezeuge; Ingenieurtechnik; Metalle; Mikroskop; Pflanzen; Post; Rechtsschutz; Stereoskop; Technische Hochschulen; Telegraphie; Wärmekraftmaschinen.

Technologie, chemische, s. Pflanzen.

Tee s. Kaffee.

Telegraphie. Die Telegraphie in ihrer Entwicklung und Bedeutung. Von Postrat J. Bruns. Mit 4 Figuren im Text. (Nr. 183.)

t auf der Grundlage eingehender praktischer Kenntnis der einschlägigen Verhältnisse einen lick in das für die heutige Kultur so bedeutungsvolle Gebiet der Telegraphie und seine artigen Fortschritte. Nach einem Überblick über die Entwicklung dieses Nachrichtenwesens seinen akustischen und optischen Anfängen werden zunächst die internationalen und malen rechtlichen, danach die technischen Grundlagen (Stromquellen, Leitungen, Apparate rc.) ndelt, sodann die Organisation des Fernsprechwesens, die Unterseekabel, die großen festischen Telegraphenlinien und die einzelnen Zweige des Telegraphen- und Fernsprechebsdienstes erörtert.

— s. a. Funkentelegraphie.

eologie s. Bibel; Christentum; Jesus; Luther; Palästina; Religion.

Tierleben. Tierkunde. Eine Einführung in die Zoologie. Von Privatdozent Dr. Kurt Hennings. Mit 34 Abbildungen. (Nr. 142.)

Will die Einheitlichkeit des gesamten Tierreiches zum Ausdruck bringen, Bewegung und Empfindung, Stoffwechsel und Fortpflanzung als die charakterisierenden Eigenschaften aller Tiere darstellen und sodann die Tätigkeit des Tierleibes aus seinem Bau verständlich machen, wobei der Schwerpunkt der Darstellung auf die Lebensweise der Tiere gelegt ist. So werden nach einem Vergleich der drei Naturreiche die Bestandteile des tierischen Körpers behandelt, sodann ein Überblick über die sieben großen Kreise des Tierreiches gegeben, ferner Bewegung und Bewegungsorgane, Aufenthaltsort, Bewußtsein und Empfindung, Nervensystem und Sinnesorgane, Stoffwechsel, Fortpflanzung und Entwicklung erörtert.

——— Zwiegestalt der Geschlechter in der Tierwelt (Dimorphismus). Von Dr. Friedrich Knauer. Mit 37 Abbildungen. (Nr. 148.)

Zeigt, von der ungeschlechtlichen Fortpflanzung zahlreicher niederster Tiere ausgehend, wie sich aus diesem Hermaphroditismus allmählich die Zweigeschlechtigkeit herausgebildet hat und sich bei verschiedenen Tierarten zu auffälligstem geschlechtlichem Dimorphismus entwickelt, an interessanten Fällen solcher Verschiedenheit zwischen Männchen und Weibchen, wobei vielfach die Brutpflege in der Tierwelt und das Verhalten der Männchen zu derselben erörtert wird.

——— Lebensbedingungen und Verbreitung der Tiere. Von Professor Dr. Otto Maas. Mit Karten und Abbildungen. (Nr. 139.)

Lehrt das Verhältnis der Tierwelt zur Gesamtheit des Lebens auf der Erde verständnisvoll ahnen, zeigt die Tierwelt als einen Teil des organischen Erdganzen, die Abhängigkeit der Verbreitung des Tieres nicht nur von dessen Lebensbedingungen, sondern auch von der Erdgeschichte, ferner von Nahrung, Temperatur, Licht, Luft, Feuchtigkeit und Vegetation, wie von dem Eingreifen des Menschen und betrachtet als Ergebnis an der Hand von Karten die geographische Einteilung der Tierwelt auf der Erde nach besonderen Gebieten.

——— Die Tierwelt des Mikroskops (die Urtiere). Von Privatdozent Dr. Richard Goldschmidt. Mit 39 Abbildungen. (Nr. 160.)

Bietet nach dem Grundsatz, daß die Kenntnis des Einfachen grundlegend zum Verständnis des Komplizierten ist, eine einführende Darstellung des Lebens und des Baues der Urtiere, dieses mikroskopisch kleinen, formenreichen, unendlich zahlreichen Geschlechtes der Tierwelt und stellt nicht nur eine anregende und durch Abbildungen instruktive Lektüre dar, sondern vermag namentlich auch zu eigener Beobachtung der wichtigen und interessanten Tatsachen vom Bau und aus dem Leben der Urtiere anzuregen.

——— Die Beziehungen der Tiere zueinander und zur Pflanzenwelt. Von Professor Dr. K. Kraepelin. (Nr. 79.)

Stellt in großen Zügen eine Fülle wechselseitiger Beziehungen der Organismen zueinander dar. Familienleben und Staatenbildung der Tiere, wie die interessanten Beziehungen der Tiere und Pflanzen zueinander werden geschildert.

——— s. a. Ameise; Mensch und Tier; Pflanzen; Plankton.

Tonkunst s. Musik.

Tuberkulose. Die Tuberkulose, ihr Wesen, ihre Verbreitung, Ursache, Verhütung und Heilung. Gemeinfaßlich dargestellt von Oberstabsarzt Dr. W. Schumburg. Mit 1 Tafel und 8 Figuren im Text. (Nr. 47.)

Schildert nach einem Überblick über die Verbreitung der Tuberkulose das Wesen derselbe beschäftigt sich eingehend mit dem Tuberkelbazillus, bespricht die Maßnahmen, durch die m ihn von sich fernhalten kann, und erörtert die Fragen der Heilung der Tuberkulose, vor alle die hygienisch-diätetische Behandlung in Sanatorien und Lungenheilstätten.

Turnen s. Gymnastik.

Unterrichtswesen s. Bildungswesen; Erziehung; Hilfsschulwesen; Hochschulen; Mädchenschule; Pädagogik; Schulhygiene; Schulwesen.

Utilitarismus s. Lebensanschauungen.

Verfassung. Grundzüge der Verfassung des Deutschen Reiches. Sechs Vorträge von Professor Dr. E. Loening. 2. Auflage. (Nr. 34.)

Beabsichtigt in gemeinverständlicher Sprache in das Verfassungsrecht des Deutschen Reiches einzuführen, soweit dies für jeden Deutschen erforderlich ist, und durch Aufweisung des Zusammenhanges sowie durch geschichtliche Rückblicke und Vergleiche den richtigen Standpunkt für das Verständnis des geltenden Rechtes zu gewinnen.

——— s. a. Fürstentum.

Verkehrsentwicklung. Verkehrsentwicklung in Deutschland. 1800—1900. Vorträge über Deutschlands Eisenbahnen und Binnenwasserstraßen, ihre Entwicklung und Verwaltung, sowie ihre Bedeutung für die heutige Volkswirtschaft von Professor Dr. W. Lotz. 2. Auflage. (Nr. 15.)

Gibt nach einer kurzen Übersicht über die Hauptfortschritte in den Verkehrsmitteln und deren wirtschaftliche Wirkungen eine Geschichte des Eisenbahnwesens, schildert den heutigen Stand der Eisenbahnverfassung, das Güter- und das Personentarifwesen, die Reformversuche und die Reformfrage, ferner die Bedeutung der Binnenwasserstraßen und endlich die Wirkungen der modernen Verkehrsmittel.

——— s. a. Automobil; Eisenbahnen; Funkentelegraphie; Post; Schiffahrt; Technik; Telegraphie.

Versicherung. Grundzüge des Versicherungswesens. Von Professor Dr. A. Manes. (Nr. 105.)

Behandelt sowohl die Stellung der Versicherung im Wirtschaftsleben, die Entwicklung der Versicherung, die Organisation ihrer Unternehmungsformen, den Geschäftsgang eines Versicherungsbetriebs, die Versicherungspolitik, das Versicherungsvertragsrecht und die Versicherungswissenschaft, als die einzelnen Zweige der Versicherung, wie Lebensversicherung, Unfallversicherung, Haftpflichtversicherung, Transportversicherung, Feuerversicherung, Hagelversicherung, Viehversicherung, kleinere Versicherungszweige, Rückversicherung.

——— s. a. Arbeiterschutz.

Volkslied. Das deutsche Volkslied. Über Wesen und Werden des deutschen Volksgesanges. Von Privatdozent Dr. J. W. Bruinier. 2. Auflage. (Nr. 7.)

Handelt in schwungvoller Darstellung vom Wesen und Werden des deutschen Volksgesanges, unterrichtet über die deutsche Volksliederpflege in der Gegenwart, über Wesen und Ursprung des deutschen Volksgesanges, Skop und Spielmann, Geschichte und Mär, Leben und Liebe.

Volksschule s. Schulwesen.

Volksstämme. Die deutschen Volksstämme und Landschaften. Von Prof. Dr. O. Weise. 3. Auflage. Mit 29 Abbild. im Text und auf 15 Tafeln. (Nr. 16.)

Schildert, durch eine gute Auswahl von Städte-, Landschafts- und anderen Bildern unterstützt, die Eigenart der deutschen Gaue und Stämme, die charakteristischen Eigentümlichkeiten der Landschaft, den Einfluß auf das Temperament und die geistige Anlage der Menschen, die Leistungen hervorragender Männer, Sitten und Gebräuche, Sagen und Märchen, Besonderheiten in der Sprache und Hauseinrichtung u. a. m.

Volkswirtschaftslehre s. Amerika; Arbeiterschutz; Bevölkerungslehre; Buchgewerbe; Deutschland; Frauenbewegung; Japan; Soziale Bewegungen; Verkehrsentwicklung; Versicherung; Wirtschaftsgeschichte.

Wald. Der deutsche Wald. Von Professor Dr. Hans Hausrath. Mit 15 Textabbildungen und 2 Karten. (Nr. 153.)

Schildert unter besonderer Berücksichtigung der geschichtlichen Entwicklung die Lebensbedingungen und den Zustand unseres deutschen Waldes, die Verwendung seiner Erzeugnisse, sowie seine günstige Einwirkung auf Klima, Fruchtbarkeit, Sicherheit und Gesundheit des Landes und erörtert zum Schlusse die Pflege des Waldes und die Aufgaben seiner Eigentümer, ein Büchlein also für jeden Waldfreund.

Warenzeichenrecht s. Gewerbe.

Wärme. Die Lehre von der Wärme. Gemeinverständlich dargestellt von Professor Dr. R. Börnstein. Mit 33 Abbildungen im Text. (Nr. 172.)

Bietet eine klare, keine erheblichen Vorkenntnisse erfordernde, alle vorkommenden Experimente in Worten und vielfach durch Zeichnungen schildernde Darstellung der Tatsachen und Gesetze der Wärmelehre. So werden Ausdehnung erwärmter Körper und Temperaturmessung, Wärmemessung, Wärme- und Kältequellen, Wärme als Energieform, Schmelzen und Erstarren, Sieden, Verdampfen und Verflüssigen, Verhalten des Wasserdampfes in der Atmosphäre, Dampf- und andere Wärmemaschinen und schließlich Bewegung der Wärme behandelt.

——— s. a. Chemie.

Wärmekraftmaschinen. Einführung in die Theorie und den Bau der neueren Wärmekraftmaschinen (Gasmaschinen). Von Prof. Richard Vater. 2. Auflage. Mit 34 Abbildungen. (Nr. 21.)

Will Interesse und Verständnis für die immer wichtiger werdenden Gas-, Petroleum- und Benzinmaschinen erwecken. Nach einem einleitenden Abschnitte folgt eine kurze Besprechung der verschiedenen Betriebsmittel, wie Leuchtgas, Kraftgas usw., der Viertakt- und Zweitaktwirkung, woran sich dann das Wichtigste über die Bauarten der Gas-, Benzin-, Petroleum- und Spiritusmaschinen sowie eine Darstellung des Wärmemotors Patent Diesel anschließt.

——— Neuere Fortschritte auf dem Gebiete der Wärmekraftmaschinen. Von Professor Richard Vater. Mit 48 Abbildungen. (Nr. 86.)

Ohne den Streit, ob „Lokomobile oder Sauggasmaschine", „Dampfturbine oder Großgasmaschine", entscheiden zu wollen, behandelt Verfasser die einzelnen Maschinengattungen mit Rücksicht auf ihre Vorteile und Nachteile, wobei im zweiten Teil der Versuch unternommen ist, eine möglichst einfache und leichtverständliche Einführung in die Theorie und den Bau der Dampfturbine zu geben.

——— s. a. Dampf.

Wasser s. Chemie.

Weltall. Der Bau des Weltalls. Von Professor Dr. J. Scheiner. 2. Auflage. Mit 24 Figuren im Text und auf einer Tafel. (Nr. 24.)

Stellt nach einer Belehrung über die wirklichen Verhältnisse von Raum und Zeit im Weltall dar, wie das Weltall von der Erde aus erscheint, erörtert den inneren Bau des Weltalls, d. h. die Struktur der selbständigen Himmelskörper und schließlich die Frage über die äußere Konstitution der Fixsternwelt.

——— s. a. Astronomie.

Weltanschauung. Die Weltanschauungen der großen Philosophen der Neuzeit. Von Professor Dr. L. Busse. 3. Auflage. (Nr. 56.)

Will mit den bedeutendsten Erscheinungen der neueren Philosophie bekannt machen unter Beschränkung auf die Darstellung der großen klassischen Systeme, die es ermöglicht, die beherrschenden und charakteristischen Grundgedanken eines jeden scharf herauszuarbeiten und so ein möglichst klares Gesamtbild der in ihm enthaltenen Weltanschauung zu entwerfen.

——— s. a. Kant; Lebensanschauung; Menschenleben; Philosophie; Rousseau; Schopenhauer; Weltproblem.

Weltäther s. Moleküle.

Welthandel. Geschichte des Welthandels. Von Oberlehrer Dr. W. Georg Schmidt. (Nr. 118.)

Eine zusammenfassende Übersicht der Entwickelung des Handels führt von dem Altertu über das Mittelalter, in dem Konstantinopel, seit den Kreuzzügen Italien und Deutschl den Weltverkehr beherrschen, zur Neuzeit, die mit der Auffindung des Seewegs nach In und der Entdeckung Amerikas beginnt und bis zur Gegenwart, in der auch der deu Kaufmann nach dem alten Hansawort „Mein Feld ist die Welt" den ganzen Erdball er

Weltproblem. Das Weltproblem von positivistischem Standpunkte aus. Von Privatdozent Dr. J. Petzoldt. (Nr. 133.)

Sucht die Geschichte des Nachdenkens über die Welt als eine sinnvolle Geschichte von Irrtümern psychologisch verständlich zu machen im Dienste der von Schuppe, Mach und Avenarius vertretenen Anschauung, daß es keine Welt an sich, sondern nur eine Welt für uns gibt. Ihre Elemente sind nicht Atome oder sonstige absolute Existenzen, sondern Farben-, Ton-, Druck-, Raum-, Zeit- usw. Empfindungen. Trotzdem aber sind die Dinge nicht bloß subjektiv, nicht bloß Bewußtseinserscheinungen, vielmehr müssen die aus jenen Empfindungen zusammengesetzten Bestandteile unserer Umgebung fortexistierend gedacht werden, auch wenn wir sie nicht mehr wahrnehmen.

——— s. a. Philosophie; Weltanschauung.

Weltwirtschaft. Deutschlands Stellung in der Weltwirtschaft. Von Professor Dr. Paul Arndt. (Nr. 179.)

Will in das Wunderwerk menschlichen Scharfsinns, menschlicher Geschicklichkeit und menschlicher Kühnheit, das die Weltwirtschaft darstellt, einführen, indem unsere wirtschaftlichen Beziehungen zum Auslande dargestellt, die Ursachen der gegenwärtigen hervorragenden Stellung Deutschlands in der Weltwirtschaft erörtert, die Vorteile und Gefahren dieser Stellung eingehend behandelt, und endlich die vielen wirtschaftlichen und politischen Aufgaben skizziert werden, die sich aus Deutschlands internationaler Stellung ergeben.

Wetter. Wind und Wetter. Fünf Vorträge über die Grundlagen und wichtigeren Aufgaben der Meteorologie. Von Professor Dr. Leonh. Weber. Mit 27 Figuren im Text und 3 Tafeln. (Nr. 55.)

Schildert die historischen Wurzeln der Meteorologie, ihre physikalischen Grundlagen und ihre Bedeutung im gesamten Gebiete des Wissens, erörtert die hauptsächlichsten Aufgaben, die dem ausübenden Meteorologen obliegen, wie die praktische Anwendung in der Wettervorhersage.

Wirtschaftsgeschichte. Die Entwicklung des deutschen Wirtschaftslebens im 19. Jahrhundert. Von Professor Dr. L. Pohle. (Nr. 57.)

Gibt in gedrängter Form einen Überblick über die gewaltige Umwälzung, die die deutsche Volkswirtschaft im letzten Jahrhundert durchgemacht hat: die Umgestaltung der Landwirtschaft; die Lage von Handwerk und Hausindustrie; die Entstehung der Großindustrie mit ihren Begleiterscheinungen; Kartellbewegung und Arbeiterfrage; die Umgestaltung des Verkehrswesens und die Wandlungen auf dem Gebiete des Handels.

——— Deutsches Wirtschaftsleben. Auf geographischer Grundlage geschildert von Professor Dr. Chr. Gruber. Neubearbeitet von Dr. Hans Reinlein. 2. Auflage. (Nr. 42.)

Beabsichtigt, ein gründliches Verständnis für den sieghaften Aufschwung unseres wirtschaftlichen Lebens seit der Wiederaufrichtung des Reichs herbeizuführen und darzulegen, inwieweit sich Produktion und Verkehrsbewegung auf die natürlichen Gelegenheiten, die geographischen Vorzüge unseres Vaterlandes stützen können und in ihnen sicher verankert liegen.

——— Wirtschaftliche Erdkunde. Von Professor Dr. Chr. Gruber. (Nr. 122.)

Will die ursprünglichen Zusammenhänge zwischen der natürlichen Ausstattung der einzelnen Länder und der wirtschaftlichen Kraftäußerung ihrer Bewohner klar machen und das Verständnis für die wahre Machtstellung der einzelnen Völker und Staaten eröffnen. Das Weltmeer als Hochstraße des Weltwirtschaftsverkehrs und als Quelle der Völkergröße, — die Landmassen als Schauplatz alles Kulturlebens und der Weltproduktion, — Europa nach seiner wirtschaftsgeographischen Veranlagung und Bedeutung, — die einzelnen Kulturstaaten nach ihrer wirtschaftlichen Entfaltung: all dies wird in anschaulicher und großzügiger Weise geführt.

—— s. a. Amerika; Deutschland; Eisenbahnen; England; Frauenarbeit; Geographie; Handwerk; Japan; Rom; Schiffahrt; Soziale Bewegungen; Verkehrsentwicklung.

Zoologie s. Ameisen; Tierleben.

Aus Natur und Geisteswelt.

Jedes Bändchen geheftet 1 Mk., geschmackvoll gebunden 1 Mk. 25 Pfg.

Übersicht nach den Autoren.

	Band-Nr.
Abel, Chemie in Küche und Haus	76
Abelsdorff, Das Auge	149
Ahrens, Mathematische Spiele	170
Alkoholismus, d., seine Wirkungen u. seine Bekämpfung, 3 Bde.	103. 104. 145
Arndt, Deutschlands Stellung in der Weltwirtschaft	179
Auerbach, Die Grundbegriffe der modernen Naturlehre	40
v. Bardeleben, Anatomie des Menschen. 2 Bde.	201. 202
Bavinck, Natürliche und künstliche Pflanzen und Tierstoffe	187
Biedermann, Die techn. Entwickl. der Eisenbahnen der Gegenwart	144
Biernacki, Die mod. Heilwissenschaft	25
Bitterauf, Napoleon I.	195
Blau, Das Automobil	166
Bloch, Die ständischen u. soz. Kämpfe	22
Blochmann, Luft, Wasser, Licht und Wärme	8
— Grundlagen der Elektrotechnik	168
Boehmer, Jesuiten	49
— Luther im Lichte der neueren Forschungen	113
Bongardt, Die Naturwissenschaften im Haushalt. 2 Bändchen	125. 126
Bonhoff, Jesus u. seine Zeitgenossen	89
Börnstein, Die Lehre von d. Wärme	172
Börnstein und Marckwald, Sichtbare und unsichtbare Strahlen	64
Braasch, Religiöse Strömungen	66
Bruinier, Das deutsche Volkslied	7
Bruns, Die Post	165
— Die Telegraphie	183
Brüsch, Die Beleuchtungsarten der Gegenwart	108
Buchgewerbe u. die Kultur. (Vorträge v.: Focke, Hermelink, Kautzsch, Waentig, Witkowski und Wuttke)	182
Buchner, 8 Vorträge aus der Gesundheitslehre	1
Burgerstein, Schulhygiene	96
Bürkner, Kunstpflege in Haus und Heimat	77
Busse, Weltanschauungen der großen Philosophen	56
Cohn, Führende Denker	176
Crantz, Arithmetik und Algebra	120
Daenell, Geschichte der Ver. Staaten von Amerika	147
v. Duhn, Pompeji	114
Eckstein, Der Kampf zwischen Mensch und Tier	18
Erbe, Historische Städtebilder aus Holland und Niederdeutschland	117
Flügel, Herbarts Lehren und Leben	164
Franz, Der Mond	90
Frech, Aus der Vorzeit der Erde	61
Frentzel, Ernährung und Volksnahrungsmittel	19
Fried, Die mod. Friedensbewegung	157
Geffcken, Aus der Werdezeit des Christentums	54
Gerber, Die menschliche Stimme	136
Giesebrecht, Die Grundzüge der israelitischen Religionsgeschichte	52
Giesenhagen, Unsere wichtigsten Kulturpflanzen	10
Gisevius, Werd. u. Vergeh. d. Pflanz.	173
Goldschmidt, Die Tierwelt d. Mikrosk.	160
Graetz, Licht und Farben	17
Graul, Ostasiatische Kunst	87
Gruber, Deutsches Wirtschaftsleben	42
— Wirtschaftliche Erdkunde	122
Günther, Das Zeitalter der Entdeckungen	26
Haendcke, Die dtsch. Kunst i. tägl. Leben	198
Hahn, Die Eisenbahnen	71
v. Hansemann, Der Aberglaube in der Medizin	83
Hartwig, Das Stereoskop	135
Hassert, Die Polarforschung	38
— Die deutschen Städte	163
Hausho fer, Bevölkerungslehre	60
Hausrath, Der deutsche Wald	153
Heigel, Politische Hauptströmungen in Europa im 19. Jahrhundert	129
Heil, Die deutschen Städte und Bürger im Mittelalter	43
Heilborn, Die deutschen Kolonien. (Land und Leute)	98
— Der Mensch	62
Hennig, Einführ. i. d. Wesen d. Musik	119
Hennings, Tierkunde. Eine Einführung in die Zoologie	142
Hensel, Rousseau	180
Hesse, Abstammungslehre und Darwinismus	39
Hubrich, Deutsches Fürstentum und deutsches Verfassungswesen	80
Janson, Meeresforsch. u. Meeresleben	30
Ilberg, Geisteskrankheiten	151
Kahle, Ibsen, Björnson u. i. Zeitgenoss.	193
Kaupe, Der Säugling	154
Kautzsch, Die deutsche Illustration.	44
Kirchhoff, Mensch und Erde	31
Kirn, Die sittlichen Lebensanschauungen der Gegenwart	177
Knabe, Gesch. des deutschen Schulwes.	85
Knauer, Zweigestalt der Geschlechter in der Tierwelt	148
— Die Ameisen	94
Kohler, Moderne Rechtsprobleme	128
Kowalewski, Infinitesimalrechnung	197
Kraepelin, Die Beziehungen der Tiere zueinander	79
Krebs, Haydn, Mozart, Beethoven	92
Kretzig, Die 5 Sinne des Menschen	27
Külpe, Die Philosophie d. Gegenwart	41
— Immanuel Kant	146
Küster, Vermehrung und Sexualität bei den Pflanzen	112
Kuypers, Volksschule und Lehrerbildung der Ver. Staaten	150
Langenbeck, Englands Weltmacht	174
Laughlin, Aus dem amerikanischen Wirtschaftsleben	127

Aus Natur und Geisteswelt.

Jedes Bändchen geheftet 1 Mk., geschmackvoll gebunden 1 Mk. 25 Pfg.

	Band-Nr.
Launhardt, Am sausenden Webstuhl der Zeit	23
Leick, Krankenpflege	152
Loening, Grundzüge der Verfassung des Deutschen Reiches	34
Lotz, Verkehrsentwicklung in Deutschland. 1800—1900	15
Luschin v. Ebengreuth, D. Münze	91
Maas, Lebensbedingungen der Tiere	139
Maier, Soziale Beweg. u. Theorien	2
von Maltzahn, Der Seekrieg	99
Manes, Grundz. d. Versicherungswes.	105
Maennel, Vom Hilfsschulwesen	73
Martin, Die höhere Mädchenschule in Deutschland	65
Matthaei, Deutsche Baukunst im Mittelalter	8
Mehlhorn, Wahrheit und Dichtung im Leben Jesu	137
Merckel, Bilder a. d. Ingenieurtechnik	60
— Schöpfungen der Ingenieurtechnik der Neuzeit	28
Meringer, Das deutsche Haus und sein Hausrat	116
Mie, Moleküle — Atome — Weltäther	58
Miehe, Die Erscheinungen des Lebens	130
Mielke, Das deutsche Dorf	192
Möller, Deutsches Ringen nach Kraft und Schönheit. I.	188
Müller, Techn. Hochschulen v. Nordam.	190
— Bilder aus der chemischen Technik	191
v. Negelein, Germ. Mythologie	96
Oppenheim, Das astronomische Weltbild im Wandel der Zeit	110
Otto, Das deutsche Handwerk.	14
— Deutsches Frauenleben	45
Pabst, Die Knabenhandarbeit	140
Paulsen, D. deutsche Bildungswesen	100
Petersen, Öffentliche Fürsorge für die hilfsbedürftige Jugend	161
— Öffentliche Fürsorge für die sittlich gefährdete Jugend	162
Petzold, Das Weltproblem	133
Pfannkuche, Relig. u. Naturwissensch.	141
Pischel, Leben u. Lehre des Buddha	109
Pohle, Entwicklung des deutschen Wirtschaftslebens im 19. Jahrh.	57
v. Portugall, Friedrich Fröbel	82
Pott, Der Text d. Neuen Testaments nach seiner geschichtl. Entwicklung	134
Ranck, Kulturgeschichte des deutschen Bauernhauses	121
Rathgen, Die Japaner	72
Rehmke, Die Seele des Menschen	36
Reukauf, Die Pflanzenwelt d. Mikrosk.	181
Richert, Philosophie	186
— Schopenhauer	81
Richter, Einführung i. d. Philosophie	155
Rietsch, Grundlagen der Tonkunst	178
von Rohr, Optische Instrumente	88
Sachs, Bau u. Tätigkeit des menschlichen Körpers	32
Scheffer, Das Mikroskop	36
Scheid, Die Metalle	29
Scheiner, Der Bau des Weltalls	24

	Band-Nr.
Schirmacher, Die mod. Frauenbew.	67
Schmidt, Geschichte des Welthandels	118
Schubring, Rembrandt	158
Schumburg, Die Tuberkulose	47
Schwemer, Restauration u. Revolut.	37
— Die Reaktion und die neue Ära	101
— Vom Bund zum Reich	102
Sieper, Shakespeare	185
von Soden, Palästina	6
von Sothen, Vom Kriegswesen im 19. Jahrhundert	59
Spiro, Geschichte der Musik	143
Stein, Die Anfänge d. menschl. Kultur	93
Steinhausen, Germanische Kultur in der Urzeit	75
Sticher, Eine Gesundheitsl. f. Frauen	171
Strauß, Mietrecht	194
Teichmann, D. Befruchtungsvorgang	70
Tews, Schulkämpfe der Gegenwart	111
— Mod. Erziehung in Haus und Schule	159
Thieß, Deutsche Schiffahrt	169
Thurn, Die Funkentelegraphie	167
Tobler, Kolonialbotanik	184
Tolksdorf, Gewerblicher Rechtsschutz in Deutschland	138
Uhl, Entstehung und Entwicklung unserer Muttersprache	84
Unger, Wie ein Buch entsteht	175
Unold, Aufgaben und Ziele des Menschenlebens	12
Vater, Hebezeuge	196
— Theorie und Bau der neueren Wärmekraftmaschinen	21
— Die neueren Fortschritte auf dem Gebiete der Wärmekraftmaschinen	86
— Dampf und Dampfmaschine	63
Verworn, Mechanik d. Geisteslebens	179
Voges, Der Obstbau	107
Volbehr, Bau und Leben der bildenden Kunst	68
Wahrmund, Ehe und Eherecht	115
Weber, Wind und Wetter	55
— Von Luther zu Bismarck. 2 Bde.	123. 124
— 1848	53
Wedding, Eisenhüttenwesen	20
Weinel, Die Gleichnisse Jesu	46
Weise, Schrift- und Buchwesen in alter und neuer Zeit	4
— Die deutschen Volksstämme und Landschaften	16
Wieler, Kaffee, Tee, Kakao und die übrigen narkot. Aufgußgetränke	132
Wilbrandt, Die Frauenarbeit	106
Wislicenus, Der Kalender	69
Witkowski, Das deutsche Drama des 19. Jahrhunderts	51
Wustmann, Albrecht Dürer	97
Zacharias, Süßwasserplankton	156
Zander, Vom Nervensystem	48
— Die Leibesübungen	13
Ziebarth, Kulturbild. a. griech. Städt.	131
Ziegler, Allgemeine Pädagogik	33
— Schiller	74
v. Zwiedineck-Südenhorst, Arbeiterschutz u. Arbeiterversicherung	78